

Probabilidades y Procesos Estocásticos

Profesor Cátedra : Fernando Lema

Profesor Auxiliar : José Luis Malverde

CLASE AUXILIAR

1 DE MAYO 2006

1. Considere el problema del mechón que efectúa saltos unitarios hacia adelante y hacia atrás en el frontis de la Escuela (Visto en clase auxiliar 3) Determine $\mathbb{E}(X)$ donde X es la variable aleatoria “Posición del mechón”.
2. Para armar su árbol de navidad, usted debe probar las luces antes de ponerlas. Para evitar probar las luces una a una, usted separa las N ampolletas y las conecta en k series de n ampolletas cada una y las prueba (considere $N = k \cdot n$). En caso de que una serie no funcione, usted prueba todas las ampolletas de esa serie. Se sabe que cada ampolleta tiene una probabilidad p de encontrarse defectuosa. Considere X : “número de pruebas hechas” y encuentre $\mathbb{E}(X)$. Encuentre k tal que, en promedio, le convenga más probar las luces de esta forma, que probarlas una a una.
3. En cierto sector de Santiago los vehículos circulan con velocidades V (km/h) que pueden ser adecuadamente modeladas por una distribución $U(20, 40)$ (km/h). Por otro lado y debido a los distintos tipos de vehículos, formas de conducir, imprevistos, etc. el rendimiento R (km/lt) para una velocidad V fija queda dado por la función densidad:

$$f_{R/V}(r|v) = \frac{50}{v^2}r \quad 0 < r < \frac{v}{5}$$

- a) Calcule el rendimiento promedio para todos los vehículos que circulan por el sector.
 - b) Calcule la probabilidad que el rendimiento supere los 4km/lt para vehículos que circulan a menos de 30km/h . Son R y V independientes?
4. a) Sea X v.a. discreta que toma valores en $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Muestre que:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > i)$$

b) Sea X v.a. continua con $\mathbb{P}(X \leq 0) = 0$. Demuestre que:

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(X > t) dt$$

SOLUCIÓN

Intuitivamente, podemos ver la esperanza de una v.a. como el promedio de ésta, por lo que, al hablar de “valor esperado”, “esperanza” y “...en promedio” nos estaremos refiriendo siempre al mismo concepto: La Esperanza.

1. Recordemos que la distribución encontrada para la variable X : “Posición del mechón”, en la clase auxiliar 3 fue:

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{\frac{n-k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} (1-p)^{\frac{n-k}{2}}$$

Haciendo uso de la definición de Esperanza se tiene:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=-n}^n \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=-n}^n \binom{n}{\frac{n-k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} (1-p)^{\frac{n-k}{2}}$$

Como resolver esta sumatoria es “complicado” veamos un método alternativo. Consideremos las variables X_i : Posición relativa del mechón en el i -ésimo salto. Luego, como el mechón da saltos “hacia adelante” con probabilidad p y da saltos “hacia atrás” con probabilidad $(1-p)$, los valores que puede tomar la variable X_i están dados por:

$$X_i = \begin{cases} 1 & p \\ -1 & 1-p \end{cases}$$

Como sabemos que $X = \sum_{i=1}^n X_i$ (i.e. la posición final del mechón después de n saltos será la suma de las posiciones relativas) y además $\mathbb{E}(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i)$, nos bastará calcular la esperanza para uno de los saltos, la cuál estará dada por:

$$\mathbb{E}(X_i) = 1 \cdot p + (-1) \cdot (1-p) = 2p - 1$$

De donde se deduce que:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) = \sum_{i=1}^n 2p - 1 = n(2p - 1)$$

2. Sea X : “número de pruebas hechas”, si definimos X_i : “Número de pruebas hechas en la i -ésima serie” tendremos que:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^k \mathbb{E}(X_i)$$

Por lo que bastará calcular $\mathbb{E}(X_i)$ para una serie cualquiera. Los valores que puede tomar la variable X_i están dados por:

$$X_i = \begin{cases} 1 & p^n \\ n+1 & 1-p^n \end{cases}$$

Pues se realizará una sola prueba si están todas las ampolletas de una serie buenas (lo cual ocurre con probabilidad p^n) y se realizarán $n+1$ pruebas si hay alguna ampolleta quemada (lo cual ocurre con probabilidad $1-p^n$) Luego $\mathbb{E}(X_i) = (n+1) - np^n$ con lo que se concluye:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^k \mathbb{E}(X_i) = \sum_{i=1}^k (n+1) - np^n = k \cdot ((n+1) - np^n) = N + k - Np^n$$

Para determinar el valor de k que hace que, en promedio, este procedimiento resulte conveniente, basta imponer que $\mathbb{E}(X) < N \Leftrightarrow N + k - Np^{\frac{N}{k}} < N$ y despejar k . (Propuesto)

3. a) ■ Se sabe que $f_{R/V}(r/v) = \frac{f_{R,V}(r,v)}{f_V(v)} \Rightarrow f_{R,V}(r,v) = \frac{50}{v^2} r \cdot \frac{1}{20} = \frac{5r}{2v^2}$

Para calcular el rendimiento promedio yo necesito conocer la función de densidad marginal del rendimiento, por lo cual utilizo lo siguiente:

Para $0 \leq r \leq 4$:

$$f_R(r) = \int_{40}^{5r} \frac{5r}{2v^2} dv = \frac{5r}{2} \left(\frac{-1}{v} \right) \Big|_{40}^{5r} = \frac{5r}{2} \left(\frac{1}{5r} - \frac{1}{40} \right) = \frac{1}{2} - \frac{r}{16}$$

Para $4 \leq r \leq 8$:

$$f_R(r) = \int_{40}^{20} \frac{5r}{2v^2} dv = \frac{5r}{2} \left(\frac{-1}{v} \right) \Big|_{20}^{40} = \frac{5r}{2} \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{40} \right) = \frac{r}{16}$$

Ahora para obtener el rendimiento promedio calculamos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} r \cdot f_R(r) dr = \int_0^4 \frac{1}{2} - \frac{r}{16} dr + \int_4^8 \frac{r}{16} dr$$

$$= \frac{1}{16} \frac{r^3}{3} \Big|_0^4 + \frac{1}{2} \frac{r^2}{2} \Big|_4^8 - \frac{1}{16} \frac{r^3}{3} \Big|_4^8$$

$$= \frac{1}{16} \frac{4^3}{3} + \frac{1}{4} (64 - 16) - \frac{1}{16 \cdot 3} (8^3 - 4^3) = 4$$

- Alternativamente, sabemos que $\mathbb{E}(r) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(r|v))$. Para calcular $\mathbb{E}(r|v)$ nos basta con $f_{r|v}(r|v)$. En efecto:

$$\mathbb{E}(r|v) = \int_0^{\frac{v}{5}} \frac{50}{v^2} r \cdot r dr = \frac{50}{v^2} \frac{r^3}{3} \Big|_0^{\frac{v}{5}} = \frac{2}{15} v$$

Luego:

$$\mathbb{E}(r) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(r|v)) = \int_{20}^{40} \frac{2}{15} v \frac{1}{20} dv = \frac{1}{300} v^2 \Big|_{20}^{40} = \frac{1}{300} (1600 - 400) = 4$$

Donde $\frac{1}{20}$ es la función densidad de la variable v .

- b) Nos piden calcular $\mathbb{P}(r \geq 4/v \leq 30)$. Utilizando probabilidades totales:

$$\mathbb{P}(r \geq 4/v \leq 30) = \int_{20}^{30} \mathbb{P}(r \geq 4/v = \alpha) f_V(\alpha) d\alpha = \int_{20}^{30} \left(\int_4^{\frac{\alpha}{5}} \frac{50}{\alpha^2} r \cdot dr \right) \cdot \frac{1}{20} d\alpha$$

$$= \frac{5}{2} \cdot \int_{20}^{30} \frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{r^2}{2} \Big|_4^{\frac{\alpha}{5}} \cdot d\alpha = \frac{5}{4} \cdot \int_{20}^{30} \left(\frac{1}{25} - \frac{16}{\alpha^2} \right) \cdot d\alpha$$

$$= \frac{5}{4} \cdot \frac{10}{25} + \frac{5}{4} \cdot \frac{16}{\alpha} \Big|_{20}^{30} = \frac{1}{2} + 20 \cdot \left(\frac{1}{30} - \frac{1}{20} \right) = \frac{1}{2} + \frac{2 \cdot (2 - 3)}{6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Claramente R y V no son independientes ya que el rendimiento dependerá siempre de la velocidad del automóvil. Para comprobar esto sabemos que si fueran independientes, se cumpliría que:

$$f_{R,V}(r, v) = f_R(r) \cdot f_V(v)$$

Tenemos que

$$f_R(r) \cdot f_V(v) = \left(\frac{1}{2} - \frac{r}{16}\right) \cdot \frac{1}{20} \neq \frac{5r}{2v^2} = f_{R,V}(r, v)$$

4. a) Se pide mostrar que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > k) = \mathbb{E}(X)$$

Se tiene que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > k) = \mathbb{P}(X > 0) + \mathbb{P}(X > 1) + \mathbb{P}(X > 2) + \dots$$

Además se tiene que:

$$\mathbb{P}(X > 0) = \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3) + \dots$$

$$\mathbb{P}(X > 1) = \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 4) + \dots$$

$$\mathbb{P}(X > 2) = \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 4) + \mathbb{P}(X = 5) + \dots$$

Y así sucesivamente.

$$\begin{aligned} \text{Rightarrow } \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > k) &= 1 \cdot \mathbb{P}(X = 1) + 2 \cdot \mathbb{P}(X = 2) + 3 \cdot \mathbb{P}(X = 3) + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \mathbb{P}(X = k) \end{aligned}$$

$$\text{Así hemos mostrado que } \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{E}(X)$$

b) Veamos el lado derecho de la igualdad:

$$\int_0^{\infty} \mathbb{P}(x > t) dt = \int_0^{\infty} 1 - \mathbb{P}(x < t) \cdot dt = \int_0^{\infty} \left(1 - \int_0^t f(x) dx\right) dt$$

Integraremos por partes, considerando $u = 1 - \int_0^t f(x) dx$ y $dv = dt$, de donde se obtendrá: $v = t$ y $du = -\frac{d}{dt} \int_0^t f(x) dx dt = -f(t) dt$, por el teorema fundamental del cálculo. Luego se tiene:

$$\int_0^{\infty} \mathbb{P}(x > t) dt = t \cdot \left(1 - \int_0^t f(x) dx\right) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} t(-f(t)) dt = \int_0^{\infty} t \cdot f(t) dt = \int_0^{\infty} x \cdot f(x) dx = \mathbb{E}(X)$$