

## Probabilidades y Procesos Estocásticos

Profesor Cátedra : Fernando Lema

Profesor Auxiliar : José Luis Malverde

### TAREA 2

ENTREGA 22 DE MAYO 2006

1. Al revisar un lote de 10 motores este es totalmente rechazado o es vendido, dependiendo del siguiente procedimiento: dos motores elegidos al azar se inspeccionan; si al menos uno es defectuoso el lote es rechazado, en otro caso es aceptado. Suponga que cada motor cuesta 75 [UM] y se vende a 100[UM]. Si el lote contiene 2 motores defectuosos, calcule la utilidad esperada del constructor.
2. Se dice que una variable aleatoria  $X$  tiene distribución de Pareto de parámetros  $X_0, \alpha$  ( $X_0 > 0, \alpha > 0$ ) si su función densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha \cdot X_0^\alpha}{x^{\alpha+1}} & \text{si } x \geq X_0 \\ 0 & \text{si } x < X_0 \end{cases}$$

- a) Calcule  $\mathbb{E}(x)$  y  $Var(x)$
  - b) Si  $Y = Ln(\frac{X}{X_0})$ , determine la densidad de  $Y$
  - c) Considere que  $X$  representa el ingreso (en miles de \$) mensual de un grupo de individuos con  $X_0 = 200$  y  $\alpha = 2$ . Suponga que de un gran número de individuos se escogen 5 al azar en forma independiente. Calcule la probabilidad que al menos 4 de ellos tengan ingresos superiores a \$300.000.
  - d) Si a todas las personas que ganan menos de \$400.000 se les da un reajuste de un 10 % mientras que a aquellos que ganan ms de \$400.000 se les da \$40.000 de reajuste, determine la distribución de probabilidad de la variable aleatoria monto de reajuste y calcule su esperanza.
3. La duracin  $T$  (en horas) de cierta máquina, es una v.a. exponencial de parámetro  $\lambda$ . La máquina tiene costos de funcionamiento de  $C_1$  (UM) por hora y produce, mientras funciona, un ingreso de  $C_2$  (UM) por hora. Para operar la máquina se requiere un especialista que cobra  $C_3$  UM por hora y que exige ser contratado por un número prefijado de horas ( $H$ ). El pago del especialista es independiente de si la máquina está o no en funcionamiento.

- a) Sea  $U$  la v.a. que denota la utilidad obtenida por el uso de la máquina. Plantee  $U$  en función de los datos entregados.
- b) Determine  $H$  de tal forma de maximizar la utilidad esperada.
- c) Suponga que  $\alpha = 0,01$ ,  $C_1 = 6$ ,  $C_2 = 20$ ,  $C_3 = 4$  y que  $H = 60$  (no es el óptimo de b). Determine la distribución de probabilidades de la v.a.  $U$ .
4. Las primeras 5 repeticiones de un experimento cuestan 10[UM] c/u. Las siguientes cuestan 5[UM] c/u. El experimento debe repetirse hasta que se obtenga el primer éxito. Si la probabilidad de éxito es 0,9 y si las repeticiones son independientes, determine el costo promedio total de la operación.
5. Suponga que la duración de un equipo sigue una distribución  $e(\lambda)$ , es decir:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Para efectuar el control de calidad se cuenta con un operario cuya misión es medir la duración de los equipos. Los equipos se ponen a funcionar en  $t = 0$ , pero el operario (por flojera) sólo se pone a inspeccionar en  $t = t_1$ , de tal forma que a todo equipo fallado anteriormente le asigna  $t_1$  horas. También por flojera el operario se va temprano (antes que termine el proceso) y a todo equipo que en  $t_2$  (hora en que se va) esté bueno le asigna  $t_2$  horas.

- a) Determine la distribución de  $Y$ : duración informada por el operario. Calcule  $\mathbb{E}(Y)$ .
- b) Considere ahora que el operario se pone honesto y decide eliminar de su proceso a todo equipo que no haya inspeccionado realmente. Determine la distribución de  $Z$ : duración informada por el operario.
- c) Si  $Y$  se distribuye con una exponencial de parámetro  $\alpha$  independiente de  $X$ , calcule  $\mathbb{P}(Y > k \cdot X) \forall k$
- d) Determine la densidad de  $Z = X + Y$ .
6. Un plano está dividido en rectas paralelas separadas una distancia  $L_1$  una de la otra. Se dispone de una aguja (barra) de largo  $L_2$  que es lanzada al azar sobre el plano. Calcule la probabilidad que la aguja corte alguna de las rectas. Evalúe en  $L_1 = L$  y  $L_2 = \frac{L}{2}$
7. Suponga que un comerciante de autos usados paga una cantidad  $X$  (en miles de pesos) por un vehículo y lo vende por una cantidad  $Y$  (en miles de pesos). Las variables  $X$  e  $Y$  tienen

una densidad conjunta :

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{36} & \text{si } 0 < x < y < 6 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

- a) Determine la función densidad de la variable ganancia por vehículo ( $G$ ).
- b) Considere ahora sólo la variable  $Y$  (precio de venta) con densidad:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{y^2}{72} & \text{si } 0 < y < 6 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Debido alas condiciones económicas imperantes, el comerciante decide hacer un regalo a sus compradores. Él ofrece por todo vehículo cuyo precio de venta está entre 0 y 2000 un 1 % en vales de bencina. Si el precio está entre 2000 y 4000 regala un par de parlantes cuyo valor es \$40. Para el resto entrega una radio de valor \$100. Estudie probabilísticamente la variable monto regalado por automóvil. Calcule su esperanza.

8. La fuerza magnética  $H$  en un punto  $P$  ubicado a  $X$  unidades de un cable con corriente  $I$ , queda dada por:

$$H = \frac{2I}{X}$$

- a) Si  $P$  es un punto variable con  $X$  e  $I$ , suponiendo que  $X$  se distribuye uniforme en el intervalo  $(2, 4)$  e  $I$  uniforme en el intervalo  $(10, 20)$  (ambas variables independientes) calcule la función densidad de  $H$ .
- b) Calcule la  $\mathbb{P}(H > 10 | X < 3)$ .
9. Considere una v.a.  $X$  con distribución Beta de parámetros  $\alpha, \beta$  ( $X \rightarrow Be(\alpha, \beta)$ )
- a) Si  $X \rightarrow Be(\alpha, \beta)$  calcule  $\mathbb{E}(X)$  y  $Var(X)$ .
- b) Sean  $Y_1 \rightarrow G(\alpha_1, \beta)$ ,  $Y_2 \rightarrow G(\alpha_2, \beta)$  v.a. independientes. Muestre que:  $U = \frac{Y_1}{Y_1 + Y_2} \rightarrow Be(\alpha_1, \alpha_2)$  y que  $U$  es independiente de  $V = Y_1 + Y_2$ .
- c) Suponga que la proporción  $X$  de artículos defectuosos, en un gran lote, es desconocida y que  $X \rightarrow Be(\alpha, \beta)$ . Si se selecciona al azar un artículo del lote, ¿cuál es la probabilidad que sea defectuoso?

10. Sea  $X$  una v.a. cualquiera. Determine  $d$  tal que minimice:
  - a)  $\mathbb{E}((X - d)^2)$ ; denominado error cuadrático medio.
  - b)  $\mathbb{E}(|X - d|)$ ; denominado error absoluto medio.
11. De un mazo de naipes se sacan dos cartas sin reposición, definiendo el vector  $(X, Y)$  Como  $X$ :  $N^\circ$  de monos obtenidos.  $Y$ :  $N^\circ$  de ases obtenidos.
  - a) Determine la distribución de probabilidades  $(X, Y)$ .
  - b) Determine las distribuciones marginales de  $X$  e  $Y$ . Calcule la  $\mathbb{E}(X)$  y  $\mathbb{E}(Y)$ .
  - c) Determine la distribución condicional de  $X$  dado  $Y = y \forall y \in R_y$  y la distribución condicional de  $Y$  dado  $X = x \forall x \in R_x$ .
  - d) Determine la distribución de probabilidades de las variables  $M = H(X, Y) = \text{Max}(X, Y)$   $M = H(X, Y) = \text{Min}(X, Y)$ .
12. El diámetro de los pernos de una caja es normal con media 2 cm. y desviación estándar 0,03 cm. El diámetro de los agujeros de las tuercas de otra caja es normal de media 2,02 cm. y desviación estándar 0,04 cm. Un perno y una tuerca ajustan si el diámetro de la tuerca es mayor que el diámetro del perno y la diferencia entre estos diámetros es menor a 0,05 cm. Si se selecciona al azar un perno y una tuerca, ¿Cuál es la probabilidad que ajusten?
13. La duración (en horas) de dos aparatos eléctricos son una v.a.  $(d_1, d_2)$  con distribución  $N(43, 36)$  y  $N(45, 9)$  respectivamente.
  - a) Si usted debe elegir uno de dichos aparatos, ¿cuál escogería?
  - b) Si se instalan dos equipos (uno de cada tipo) de tal forma que uno de ellos funciona cuando el otro falla. Calcule la probabilidad que el sistema total dure más de 80 hrs.
  - c) Si se elige sólo equipos de tipo  $d_1$  y se instalan de tal forma que el  $i$ -ésimo comienza a funcionar cuando el  $(i - 1)$ -ésimo falla, determine cuantos equipos se deben instalar para que el sistema funcione más de 750 hrs. con probabilidad 0,99. Asuma independencia en la falla de los equipos.
14. Se considera que el tiempo de reacción frente a un estímulo luminoso es una v.a.  $T$  distribuída normalmente con media 0,65 segundos. De acuerdo con los resultados de una investigación se estima que bajo el efecto de cierta dosis de alcohol, el tiempo de reacción frente al mismo estímulo puede expresarse como  $T^* = 1,4T - 0,02$ . Además, se indica que la probabilidad que individuo, que ha ingerido alcohol, reaccione antes de 1 segundo es de

0,9.

- a) ¿Cuál es la probabilidad que un sujeto que no ha ingerido alcohol reaccione antes de 0,7 segundos?
  - b) Si se escogen 10 sujetos en forma independiente que no han ingerido alcohol ¿cuál es la probabilidad que a lo más 2 reaccionen después de 0,7 segundos?
15. La nota de los alumnos del curso MA34A puede ser considerada una v.a. normal de media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ . Si se sabe que se aprueba con nota  $\geq 4,0$ , se reprueba con nota  $< 3,7$  y se queda pendiente con nota entre 3.7 y 4.0:
- a) Suponga  $\mu = 4,2$ ,  $\sigma^2 = 0,8^2$  y 110 alumnos. Si se elige un grupo de 10 alumnos, sin reposición, calcule la probabilidad que “a lo más dos de ellos esten reprobados y al menos 9 esten aprobados”.
  - b) Suponga que  $\mu$  es desconocido y se escoge una muestra de alumnos de tamaño  $n$  (independiente). Determine  $n$  de tal forma que la media muestral ( $\bar{X}$ ) difiera de la media poblacional ( $\mu$ ) en menos de 0.5 con probabilidad de 0.95 .