

## Probabilidades y Procesos Estocásticos

Profesor Cátedra : Fernando Lema

Profesor Auxiliar : José Luis Malverde

### TAREA 1

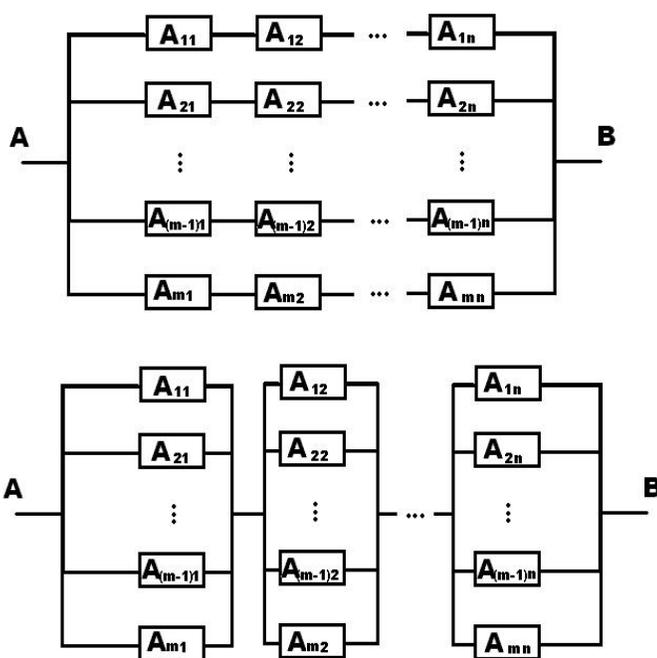
#### ENTREGA: CONTROL 1

1. Considere un mazo de naipes.
  - a) Se extraen 4 cartas al azar con reemplazo. Calcule la probabilidad:
    - 1) Que las 4 sean, rojas o pares.
    - 2) Que las 4 sean rojas, o las 4 sean pares.
  - b) Se extraen 6 cartas sin reemplazo. Calcule la probabilidad:
    - 1) Que al menos 4 sean, rojas o pares.
    - 2) Que al menos 4 sean rojas, o al menos 4 sean pares.
2. Considere el alfabeto español compuesto de 27 letras (sin Ch y Ll).
  - a) Si se desea escoger grupos de 10 letras al azar de cuántas maneras se puede hacer?
    - 1) Sin reposición.
    - 2) Con reposición.
  - b) Al sacar las letras (con reposición) se obtuvo al menos una "S". Calcule la probabilidad que la primera "S" se haya obtenido en la tercera extracción.
  - c) Suponga ahora que se sacaron 10 letras (con reposición) y se obtuvo "MISSISSIPI". Cuántas palabras se pueden formar con las letras obtenidas, de tal forma que no queden 2 o más "I" juntas?
  - d) Elegidas las 10 letras, usted y su mejor amigo(a) juegan sacando letras (de entre las 10, con reposición) alternadamente, ganando el que obtiene primero una "P" ó una "M". Describa un espacio muestral adecuado para este juego. Cuál es la probabilidad que usted gane si comienza sacando?

3. Usted y su mejor amigo juegan a la ruleta rusa de forma tal que después de cada intento (disparo) se hace girar la nuez del revólver.
- Si la nuez tiene capacidad para 6 balas y se pone sólo una, calcule la probabilidad que el jugador que comienza el juego muera. Indique el espacio muestral usado.
  - Suponga que usted tiene un súper revólver con la capacidad que desee (con respecto al número de balas) y que, además, puede elegir la cantidad de balas que pondrá en el súper revólver para jugar. Bajo estas condiciones. Es posible lograr que el juego sea equilibrado?
4. Preparándose para el invierno, el señor Hormiga ha comprado 7 juegos de calcetines de colores distintos (recuerde que una hormiga tiene 6 patas y por ende cada juego posee 6 calcetines)
- Además usted sabe que entre las hormigas es considerado formal utilizar al menos 4 calcetines del mismo color. Indique de cuántas formas se puede poner los calcetines el señor Hormiga de manera de mantenerse siempre formal.
5. Suponga que una persona está situada a  $N$  cuadras al sur, y a  $M$  cuadras al oeste de la esquina a la cual quiere llegar.
- Cuántos caminos "inteligentes" existen entre ambos puntos? (Camino "inteligente" se entenderá por aquel que sólo consta de desplazamientos que acercan al destino, es decir, unitarios de una cuadra tanto en dirección norte como este).
  - Considere  $M=N$ . Fijándose que para llegar a destino en este caso, el camino elegido debe pasar por alguna intersección de las que forman la diagonal secundaria del cuadrículado; calcule la suma de los cuadrados de los coeficientes binomiales sobre  $N$ .
- Nota: En todo el problema, considere que las calles no terminan dentro del cuadrículado, o sea, todo camino "inteligente" es susceptible de ser realizado.
6. En la mesa redonda del rey Arturo están sentados 12 caballeros, cada uno de ellos enemistado con sus 2 vecinos inmediatos. El rey desea escoger un grupo de cinco caballeros para rescatar una princesa de la cueva de un dragón.
- De cuántas maneras se puede elegir el grupo de modo que no haya enemigos en él?
  - Con qué probabilidad no hay enemigos en un grupo de cinco caballeros elegidos al azar?
7. Se disputa un torneo de tenis entre  $2^n$  jugadores igualmente hábiles. Para la primera ronda, los pares de oponentes se determinan al azar y en cada una de las rondas sucesivas los pares de adversarios se forman al azar entre los jugadores que han vencido en la ronda anterior.

Si A y B son dos jugadores:

- a) Cuál es la probabilidad que se enfrenten en la  $k$ -ésima ronda?
  - b) Cuál es la probabilidad que se enfrenten en el torneo?
8. Dos personas, A y B, juegan sacando cartas de dos mazos idénticos (revueltos de manera diferente), de manera independiente y con reposición (luego de sacar y ver una carta, la devuelve y revuelve nuevamente el mazo), hasta sacar un mono. Gana aquel que realiza un menor número de extracciones.
- a) Plantee un espacio muestral para este juego-experimento.
  - b) Calcule las siguientes probabilidades: que A gane, que A pierda y que empaten.
9. Considere los circuitos:



Las componentes  $A_{ij}$  tienen una probabilidad  $p$  de funcionar ( $(1 - p)$  de fallar) y lo hacen en forma independiente. Calcule para ambos circuitos la probabilidad que exista flujo desde el punto A hasta el punto B.

10. En un concurso de TV existen 3 puertas con un premio millonario detrás de una de ellas. El animador (que sabe cual es la puerta millonaria) le pide al concursante que escoja alguna. Posteriormente el animador abre una puerta no premiada de entre las dos que quedan y

se la muestra al concursante. Le ofrece además cambiar su elección de puerta. Indique con argumentos probabilísticos que le conviene al concursante.

11. Para predecir el tiempo un día es clasificado como seco o lluvioso. Por experiencia se sabe que la probabilidad que un día sea igual al anterior se asume constante e igual a  $p$ .
- a) Si el 1 de abril es seco con probabilidad  $\beta$  muestre que la probabilidad que el  $n$ -ésimo día del año (contado a partir del 1 de abril) sea seco ( $P_n$ ) queda dada por:

$$P_n = \left[ \left( \beta - \frac{1}{2} \right) (2p - 1)^{n-1} \right] + \frac{1}{2}$$

- b) Si el 16 de abril está seco calcule la probabilidad que el 14 de abril también lo haya estado. Para esto considere  $\beta = 1$ ,  $p = \frac{9}{10}$ .
12. Cuando en una encuesta se desea preguntar por algún tema delicado como el aborto (o infidelidad, violencia, divorcio, etc.), y que las personas no están dispuestas a contestar abiertamente, se puede usar el siguiente procedimiento encubierto para estimar la probabilidad  $p$  que una persona esté a favor :

Al encuestado se le presentan dos preguntas:

- A Está de acuerdo con el aborto?  
B Está en desacuerdo con el aborto?

y se le pide que lance (en secreto) un dado perfecto, de modo que si sale mayor a cuatro contesta A y en caso contrario contesta B. Por último lo único que el encuestado responde es SI o NO.

- a) Describa un espacio muestral para este procedimiento.
- b) Si una persona respondió SI, ¿Cuál es la probabilidad que esté a favor del aborto?
- c) Si a usted, como encargado de la encuesta, le entregan como resultado la proporción (probabilidad) de personas que respondió SI ( $P_s$ ), calcule la proporción (probabilidad) de personas que está a favor del aborto.

Obs: Suponga que la encuesta es aplicado a un gran número de personas y que estas son honestas al responder.

13. Suponga que en un juego usted gana un partido con probabilidad  $p$ . Cuando gana su capital se dobla y cuando pierde su capital se reduce a la mitad. Si comienza con  $C$  [UM] de capital y juega  $n$  partidos independientes, determine la distribución de probabilidad de la variable aleatoria Utilidad.

14. Si la v.a.  $K \rightarrow U(0, 5)$ , calcule la probabilidad que las raíces de la ecuación  $4x^2 + 4Kx + K + 2 = 0$  sean reales.

$$K \rightarrow U(a, b) \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

15. En un ataque aéreo la misión es destruir una pista de aterrizaje. El sector donde cae la bomba queda inutilizado en su ancho si esta cae a lo sumo a 10 metros del eje central de la pista. La distancia del impacto al eje central de la pista es una v.a. con función densidad definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{30+x}{900} & \text{si } -30 \leq x \leq 0 \\ \frac{30-x}{900} & \text{si } 0 \leq x \leq 30 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

- a) Si para inutilizar la pista se necesitan por lo menos  $k$  impactos Cuál es la probabilidad de lograr el objetivo si en el ataque se lanzan  $n$  bombas?
- b) Si  $k=1$ , determine cuantas bombas se deben lanzar para inutilizar la pista con probabilidad 0,99.