Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Semestre Otoño 2006
Cálculo Numérico
MA33A-01

Profesor: Gonzalo Hernández.
Auxiliar: Gonzalo Ríos.
Fecha: 31 de Marzo

Auxiliar 3: Factorización y Métodos Iterativos

Resumen Materia

1. **Matriz tridiagonal:** Una matriz A cuadrada es tridiagonal si sus coeficientes no nulos se ubican en las diagonales principal y secundarias.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & ... & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 0 & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

2. **Método de Crout para matrices tridiagonales:** Una matriz tridiagonal puede ser factorizada $A = LU$ como:

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & l_{32} & l_{33} & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & l_{43} & l_{44} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 0 & l_{n(n-1)} & l_{nn} \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & u_{23} & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & u_{34} & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & u_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   (a) Condición Inicial
      i. $l_{11} = a_{11}$
      ii. $u_{12} = \frac{a_{12}}{l_{11}}$
   (b) Para $i = 2, ..., n-1$
      i. $l_{i(i-1)} = a_{i(i-1)}$
      ii. $l_{ii} = a_{ii} - l_{i(i-1)}u_{(i-1)i}$
      iii. $u_{i(i+1)} = \frac{a_{i(i+1)}}{l_{ii}}$
   (c) Para $i = n$
      i. $l_{n(n-1)} = a_{n(n-1)}$
      ii. $l_{nn} = a_{nn} - l_{n(n-1)}u_{(n-1)n}$

3. **Matriz Definida Positiva:**
   (a) Una matriz cuadrada A es definida positiva si y solo si: $\vec{x}^t A\vec{x} > 0 \ \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$
   (b) Teorema: Si A es definida positiva, entonces se cumple:
      i. $det(A) \neq 0$
      ii. $a_{kk} > 0 \ \forall k = 1, \ldots, n$
      iii. $\max\limits_{1\leq j,k\leq n} |a_{kj}| \leq \max\limits_{1\leq k\leq n} |a_{kk}|$
      iv. $(a_{ij})^2 \leq a_{ii}a_{jj} \ \forall i \neq j$
   (c) Teorema: A es definida positiva si y solo si los determinantes de las matrices cofactores principales son positivos: $det(A_{kk}) > 0 \ \forall k = 1, \ldots, n$ donde

$$A_{kk} = \begin{bmatrix} a_{11} & ... & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & ... & a_{kk} \end{bmatrix}$$

(d) Teorema: A es definida positiva si y solo si puede factorizarse como $A = LL^t$ donde L es una matriz triangular inferior con $l_{ii} > 0 \ \forall i = 1, \ldots, n$.

4. **Método de Cholesky:**

   (a) $l_{11} = \sqrt{a_{11}}$

   (b) Para $j = 2, ..., n \quad l_{j1} = \frac{a_{j1}}{l_{11}}$

   (c) Para $i = 2, ..., n-1$ y $j = (i+1), \ldots, n$

      i. $l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} (l_{ik})^2} \qquad l_{ji} = \frac{a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} l_{ik}}{l_{ii}}$

   (d) $l_{nn} = \sqrt{a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} (l_{nk})^2}$

5. **Método Iterativo:**

   (a) La idea es empezar con una aproximación inicial $\vec{x}^{(0)}$ a la solución $\vec{x}$ del sistema $A\vec{x} = \vec{b}$, y generar una sucesión de vectores $\left\{\vec{x}^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ que converge a $\vec{x}$.

   (b) La forma de los elementos de la sucesión es $\vec{x}^{(k+1)} = f(\vec{x}^{(k)})$

   (c) Los métodos más utilizados son del tipo $f(\vec{x}^{(k)}) = B\vec{x}^{(k)} + \vec{h}$ donde $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$

6. **Construyendo un Método Iterativo:**

   (a) Sean M y $N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tales que: M es invertible y $A = M - N$

   (b) $Ax = b \iff Mx = Nx + b \iff x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$

   (c) $B = M^{-1}N$ y $h = M^{-1}b$

   (d) Se puede descomponer A como $A = diag(A) + low(A) + up(A)$ donde

      i. $diag(A)_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & si \quad i = j \\ 0 & si \quad i \neq j \end{cases}$ matriz diagonal

      ii. $low(A)_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & si \quad i > j \\ 0 & si \quad i \leq j \end{cases}$ matriz triangular inferior

      iii. $up(A)_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & si \quad i < j \\ 0 & si \quad i \geq j \end{cases}$ matriz triangular superior

7. **Método de Jacobi:**

   (a) se define M y N

      i. $M = diag(A)$

      ii. $N = -[low(A) + up(A)]$

      iii. $B = -diag(A)^{-1}[low(A) + up(A)]$

      iv. $h = diag(A)^{-1}b$

   (b) El vector de la iteración k del método de Jacobi satisface la siguiente fórmula iterativa:

   $$x_i^{(k)} = \frac{\left(-\sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} + b_i\right)}{a_{ii}} \quad 1 \leq i \leq n,\ k = 1, 2, 3...$$

8. **Método de Gauss - Seidel:**

   (a) se define M y N

      i. $M = [diag(A) + low(A)]$

      ii. $N = -up(A)$

      iii. $B = -\left[diag(A) + low(A)\right]^{-1} [up(A)]$

      iv. $h = \left[diag(A) + low(A)\right]^{-1} b$

   (b) El vector de la iteración k del método de Gauss-Seidel satisface la siguiente fórmula iterativa:

   $$x_i^{(k)} = \frac{\left(-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} + b_i\right)}{a_{ii}} \quad 1 \leq i \leq n,\ k = 1, 2, 3...$$

9. **Análisis de Error de los Métodos Iterativos:** Si $x^{(k)}$ es la iteración k de J o G-S y $Ax = b$:
$\frac{\|x-x^{(k)}\|}{\|x\|} \leq \|A\| \left\|A^{-1}\right\| \frac{\|b-Ax^{(k)}\|}{\|b\|}$

Problemas

1. Dada la matriz tridiagonal A :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

   (a) Determine su descomposición LU
   (b) Para $b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t$ resuelva el SEL (A, b) mediante el Método de Crout.
   (c) Es la matriz A definida positiva ? Si lo es determine su descomposición de Cholesky.

2. Sea la matriz de Pascal:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

   (a) Determine si es definida positiva
   (b) Si lo es, determine su descomposición de Cholesky.

3. Sea el SEL definido por:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   (a) Resuelva el SEL mediante el método de iterativo de Jacobi (5 iteraciones)
   (b) Resuelva el SEL mediante el método iterativo de Gauss-Seidel (5 iteraciones)
   (c) Compare las soluciones entregadas por los método iterativos con respecto a la solución entregada por el método de Gauss: $x = \begin{bmatrix} \frac{3}{11} \\ \frac{2}{11} \\ \frac{2}{11} \\ \frac{3}{11} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.272727272727 \\ 0.181818181818 \\ 0.181818181818 \\ 0.272727272727 \end{bmatrix}$
   Obs: ocupe $\vec{x}^0 = \vec{0}$