Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Semestre Otoño 2006
Cálculo Numérico
MA33A-01

Profesor: Gonzalo Hernández.
Auxiliar: Gonzalo Ríos.
Fecha: 24 de Marzo

Auxiliar 2: Sistemas de Ecuaciones Lineales

Resumen Materia

1. **Sist. de Ecs. Lineales:** $A\vec{x} = \vec{b}$ donde $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$,y $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ es incógnita
2. **Solución Teórica:**
   (a) Caso Sistema Homogéneo: $\vec{b} = \vec{0}$
      i. $m < n$: Infinitas Soluciones
      ii. $m = n$: 1 ó Infinitas Soluciones
      iii. $m > n$: Infinitas Soluciones
   (b) Caso Sistema No-Homogéneo: $\vec{b} \neq \vec{0}$
      i. $m < n$: 0 ó Infinitas Soluciones
      ii. $m = n$: 0, 1 o Infinitas Soluciones
      iii. $m > n$: 0, Infinitas Soluciones
3. **Proposición:** Dado un SEL cuadrado con $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:
   (a) A es invertible
   (b) $\det(A) \neq 0$
   (c) $A\vec{x} = \vec{b}$ tiene solución única
4. **Norma**:La norma de $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ es $\|C\| = \max\limits_{i=1\ldots n} \sum\limits_{j=1}^{n} |c_{ij}|$
5. **Error al perturbar un SEL**:
   (a) Perturbar A: $\frac{\|\delta x\|}{\|x+\delta x\|} \leq \|A\| \left\|A^{-1}\right\| \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$
   (b) Perturbar b:$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \left\|A^{-1}\right\| \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$
6. **Número de condicionamiento**: dada la matriz A, $cond(A) = \|A\| \cdot \left\|A^{-1}\right\|$ y se cumple que $cond(A) \geq 1$
7. **Método de Gauss:** descomposición LU, donde L es matriz triangular inferior invertible y U es matriz triangular superior
   (a) Se forma la matriz aumentada: $AA^{(1)} = \begin{bmatrix} A & \vdots & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^1_{11} & a^1_{12} & ... & a^1_{1n} & \vdots & a^1_{1(n+1)} \\ a^1_{21} & a^1_{22} & \ddots & \vdots & \vdots & a^1_{2(n+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a^1_{n1} & a^1_{n2} & ... & a^1_{nn} & \vdots & a^1_{n(n+1)} \end{bmatrix}$
   (b) Se multiplica por $E^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ -\frac{a^1_{21}}{a^1_{11}} & 1 & 0 & ... & 0 \\ -\frac{a^1_{21}}{a^1_{11}} & 0 & 1 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{-a^1_{n1}}{a^1_{11}} & 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}$ y se forma $AA^{(1)} = \begin{bmatrix} a^2_{11} & a^2_{12} & ... & a^2_{1n} & \vdots & a^2_{1(n+1)} \\ 0 & a^2_{22} & \ddots & \vdots & \vdots & a^2_{2(n+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a^2_{n2} & ... & a^2_{nn} & \vdots & a^2_{n(n+1)} \end{bmatrix}$

(c) Se multiplica por $E^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & -\frac{a_{32}^2}{a_{22}^2} & 1 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \frac{-a_{n2}^2}{a_{22}^2} & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}$ y se forma $AA^{(2)} = \begin{bmatrix} a_{11}^3 & a_{12}^3 & a_{13}^3 & ... & a_{1n}^3 & \vdots & a_{1(n+1)}^3 \\ 0 & a_{22}^3 & a_{23}^3 & \vdots & \vdots & \vdots & a_{2(n+1)}^3 \\ 0 & 0 & a_{33}^3 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & a_{nn}^3 & \vdots & a_{n(n+1)}^3 \end{bmatrix}$

(d) Se repite de forma análoga $n-1$ veces, se obtiene $U_A = AA^{(n)} = E^{(n-1)}E^{(n-2)}E^{(n-3)}...E^{(2)}E^{(1)}AA^{(1)}$

(e) Luego, $U_A = \begin{bmatrix} U & \vdots & u_{n+1} \end{bmatrix}$ y $E^{(n-1)}E^{(n-2)}E^{(n-3)}...E^{(2)}E^{(1)} = L^{-1}$ y se tiene $A = LU$

(f) Finalmente, para despejar $\vec{x}$, ya tenemos e sistema $U\ \vec{x} = L^{-1}\vec{b}$, y como U es triangular superior, se tiene un algoritmo de inducción en reversa:

i. $x_n = \frac{u_{n(n+1)}}{u_{nn}}$

ii. $x_k = \frac{1}{u_{kk}} \left(u_{k(n+1)} - \sum_{j=k+1}^{n} u_{kj}x_j \right)$ $k = (n-1), ..., 1$

(g) También se puede resolver de a forma: $Ax = b \Longleftrightarrow LUx = b \Longleftrightarrow Ly = b$ donde $y = Ux \Longrightarrow Ux = L^{-1}b \Longrightarrow x = U^{-1}L^{-1}b$

8. **Ops:** Es el número de operaciones aritméticas de un algoritmo, y sirve para medir la eficiencia del algoritmo.

9. **Estratégias de pivoteo:** En cada etapa de los dos métodos anteriores se supone el elemento pivote $a_{kk}^k \neq 0$. Ahora, si $a_{kk}^k = 0$, entonces esto puede ser solucionado cambiando la fila correspondiente. Puede ocurrir también que el elemento pivote sea no nulo, pero cercano a cero, de tal manera que usando este elemento como pivote se introduzcan errores que se propaguen a través de los cálculos. Para salvar este inconveniente introducimos el pivoteo parcial y completo.

   (a) Pivoteo parcial: se permuta la ecuación k con la ecuación m de mayor pivote en módulo, $\left|a_{mk}^k\right| \geq \left|a_{jk}^k\right| \forall j = k+1, ..., n$

   (b) Pivoteo completo: el elemento pivote es buscado entre las filas y las columnas superiores a k, y por lo tanto deben cambiarse la fila m y la columna l a la posición k correspondiente. Notemos que cuando cambiamos una columna, cambia el orden de las incógnitas, luego al terminar el proceso, debe tenerse en cuenta este cambio: $\left|a_{ml}^k\right| \geq \left|a_{ij}^k\right| \forall i, j = k+1, ..., n$

10. **Método de Gauss-Jordan:** consiste en aplicar 2 veces la primera parte del método de Gauss, es decir: triangularizar superior e inferiormente la matriz A: $A\ \vec{x} = \vec{b} \Longrightarrow U\ \vec{x} = L^{-1}\vec{b} \Longrightarrow D\ \vec{x} = \vec{b}'$ donde D es una matriz diagonal y $\vec{b}'$ es la columna resultante de la matriz aumentada.

11. **Matriz Inversa:**

   (a) Se aplica el método de Gauss – Jordan al SEL aumentado con las columnas de la matriz identidad

   (b) Se aplica el método de Gauss al SEL aumentado con las columnas de la matriz identidad

12. **Determinante:**

   (a) Fórmula recursiva de Laplce: $det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij})\ \forall i,\ A_{ij}$: Matriz cofactor ij de A, se obtiene eliminando fila i y columna j

   (b) Si todos los coeficientes de una fila o columna de A son ceros $\Longrightarrow det(A) = 0$

   (c) Si dos o más filas o columnas de A son linealmente dependientes $\Longrightarrow det(A) = 0$

   (d) Si se reemplaza la fila i por la fila j donde $i \neq j$ entonces $\Longrightarrow det(A\prime) = -det(A)$

   (e) Si se reemplaza la fila i (Fi)por $(Fi + \lambda Fj)$ donde $i \neq j$ entonces $\Longrightarrow det(A\prime) = det(A)$

   (f) Si A y B son dos matrices cuadradas de igual tamaño: $det(AB) = det(A)det(B)$

   (g) $det(A^t) = det(A)$

   (h) Si A es invertible: $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$

   (i) Si A es una matriz triangular inferior, superior o diagonal: $det(A) = \prod_{k=1}^{n} a_{kk}$

13. **Método de Gauss para la determinante:** $det(A) = det(L)det(U) = det(U) = \prod_{k=1}^{n} u_{kk}$

Problemas

1. Dado el SEL:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(a) Determine la descomposición $A = LU$ a través del método de Gauss.

(b) Resuelva el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ utilizando la factorización $A = LU$.

(c) Calcule el $\det(A)$. Si $\det(A) \neq 0$ calcule A^{-1} mediante el método de Gauss-Jordan.

(d) Calcule $cond(A)$. La matriz A está bien o mal condicionada ? Qué efecto tiene el condicionamiento sobre la resolución de otro SEL similar al definido en este problema.