Tarea N^o 1 MA-33A-1

Dr. Gonzalo Hernández Oliva

UChile - Departamento de Ingeniería Matemática

1 Aproximación de Taylor y Aritmética Finita

1) Determine el polinomio de Taylor de grado 3 en torno a $x_0 = 0$, $p_3(x)$, de la función:
$$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{3}}$$

   (a) Utilice $p_3(x)$ para evaluar aproximadamente las raíces cúbicas de $x = 0.5, 0.75, 1.25$ y 1.5. Calcule los errores cometidos al realizar esta aproximación.

   (b) Repita los cálculos anteriores utilizando aritmética finita de redondeo de 3 cifras significativas.

   (c) Repita los cálculos anteriores utilizando aritmética finita de redondeo de 4 cifras significativas.

   (d) Es posible obtener cotas del error utilizando la formula del error del polinomio de Taylor ?

   (e) Aproxime $\int_0^1 f(x)dx$ mediante $\int_0^1 p_2(x)dx$. Determine el error cometido por esta aproximación.

2) Utilizando aritmética finita de redondeo de 3 y 4 cifras significativas determine las raíces aproximadas de las siguientes ecuaciones cuadráticas. Calcule los errores cometidos al realizar esta aproximación comparando las soluciones obtenidas con las exactas:

   (a) $\frac{1}{3}x^2 - \frac{123}{4}x + \frac{1}{6} = 0$

   (b) $1.002123x^2 - 11.011456x + 0.012656 = 0$

   (c) $0.023415x^2 - 1.5677x + 0.097989 = 0$

3) En un circuito eléctrico con voltaje $V(t)$ y una inductancia L, la primera Ley de Kirchhoff establece que:

$$V(t) = L\frac{dI(t)}{dt} + RI(t)$$

donde R es la resistencia del ciruito e I es la corriente eléctrica. Suponga que se mide la corriente I en varios instantes de tiempo obteniéndose:

t	1.00	1.01	1.02	1.03	1.04
i	3.10	3.12	3.14	3.18	3.24

donde t se mide en segundos, I se mide en amperes, la inductancia L es una constante igual a 0.98 henries y la resistencia es de 0.142 ohms. Determine el valor del voltaje V en $t = 1.00, 1.01, 1.02, 1.03$,1.04 utilizando una aproximación de la derivada de $I(t)$. Determine el error absoluto y relativo de estas aproximaciones comparando con el valor exacto de la derivada de $I(t)$.

2 Representación Numérica y Errores

1) En cada caso obtener el número real representado según fl en la codificación actual (64 bits) floating point:

   (a) 0 10101010101 11110000011100...00011111

   (b) 1 11111111111 10101010000000...00101011

   (c) 0 01010101010 10101110111000...01110010

2) Obtenga la codificación actual floating point fl de los siguientes números reales:

   (a) 0.975421 (b) 172.79751 (c) $\sqrt{2}$

3) Realice un análisis de primer orden para determinar la propagación de errores generados por las siguientes operaciones matemáticas aplicadas a dos reales x e y:

   (a) $\phi(x, y) = x^2y^2$

   (b) $\phi(x, y) = (x + y)^2$

   (c) $\phi(x, y) = \dfrac{x + y}{x - y}$

   (d) $\phi(x, y) = \ln(x + y)$

   Determine cuáles de las operaciones anteriores son estables con respecto a la propagación de errores.

3 Métodos para Sistemas de Ecuaciones Lineales

1) Método de Mínimos Cuadrados para Regresión Cuadrática: Dados n puntos (x_k, y_k) $k = 1, ..., n$ el objetivo de este método es determinar el polinomio cuadrático $y = \beta_2 x^2 + \beta_1 x + \beta_0$ que es solución óptima del problema de optimización:

$$\underset{\beta_2,\beta_1,\beta_0 \in \mathbb{R}}{Min\ \varepsilon} = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k^2 = \sum_{k=1}^{n} \left[y_k - (\beta_2 x_k^2 + \beta_1 x_k + \beta_0) \right]^2$$

Es decir determinar el polinomio de orden 2 que mejor representa los puntos (x_k, y_k) $\forall k = 1, ..., n$

(a) Obtenga fórmulas para los parámetros β_2, β_1 y β_0 en función de (x_k, y_k)

(b) Considere los puntos:

x_k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y_k	1.51	0.72	-0.65	1.12	1.78	5.23	7.82	13.21	17.15	25.36

Determine los parámetros β_2, β_1 y β_0 en este caso. Adicionalmente determine los errores cometidos por esta aproximación.

2) Para la matriz tridiagonal:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

(a) Métodos Directos:

i) Determine su descomposición $PA = LU$ y resuelva el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ para $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}^t$.

ii) Calcule el $\det(A)$ y determine A^{-1} mediante el método de Gauss-Jordan. Calcule $cond(A)$.

iii) Determine la factorización de Crout de A y resuelva el SEL.

iv) Es A definida positiva ? Si lo es determine su factorización de Cholesky.

(b) Métodos Iterativos:

i) Resuelva el SEL mediante el método iterativo de Jacobi.

ii) Resuelva el SEL mediante el método iterativo de Gauss-Seidel.

(c) Compare las soluciones entregadas por los método iterativos con respecto a la solución entregada por el método de Gauss.

3) Considere el SEL definido por:

$$A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 & 1 & 1 & 0 \\ 0.1 & 4 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 60 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 8 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 4 & 700 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

(a) Resuelva el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ aplicando el método de Gauss.

(b) Calcule $cond(A)$. La matriz A está bien o mal condicionada ?

(c) Resuelva el SEL mediante los métodos iterativos de Jacobi y Gauss-Seidel. Compare las soluciones entregadas por estos método con respecto a la solución entregada por el método de Gauss.

(d) Resuelva el SEL mediante el método SOR (Método de Sobrerelajación - Investigar en el Burden) para $\omega = 1.25$.

(e) Resuelva el SEL mediante el método de gradiente conjugado con matriz de precondicionamiento $C = C^{-1} = I$ (Investigar en el Burden)