

Control #1 MA26A Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.
Semestre 2006-1, Prof. Axel Osses, Prof. Auxiliar: Jorge Lemus

P1.- (a) Sea $\beta \in \mathbb{R}$. Encuentre la forma que tiene la solución de

$$y'' + \beta y' + y = x^2 e^x$$

para distintos valores de β (no es necesario que encuentre las constantes).
Indicación : puede usar operadores anuladores.

(b) Sea $f(x, y)$ una función tal que $f(\lambda x, \lambda^\alpha y) = \lambda^{\alpha-1} f(x, y)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ fijo. Considere

$$y' = f(x, y)$$

¿Qué cambio de variables transforma la ecuación anterior en una ecuación a variables separables? ¿Qué ecuación se obtiene?

P2.- (a) Para $x > 0$, sabiendo que $y_1 = x \ln(x)$ e $y_2 = x$ son soluciones de la ecuación homogénea, demuestre que estas son linealmente independientes y resuelva

$$x^2 y'' - x y' + y = 4x \ln(x) \quad \text{para } x > 0.$$

(b) Sean y_1 e y_2 dos soluciones con Wronskiano no nulo de

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \quad \text{para } x \in (0, \ell)$$

tales que $y_1(0) = 0$, $y_1(\ell) = 1$, $y_2(0) = 1$, $y_2(\ell) = 0$. Pruebe que el valor medio de a_1 :

$$M_1 = \frac{1}{\ell} \int_0^\ell a_1(x) dx$$

puede ser obtenido mediante la fórmula

$$M_1 = \ln \left[-\frac{y_1'(0)}{y_2'(\ell)} \right]^{1/\ell}.$$

Indicación: puede serle útil la fórmula de Abel.

P3.- Suponga que el cuerpo humano elimina un medicamento a una velocidad que es proporcional a la cantidad y de medicamento presente en la sangre. En $t = 0$ se aplica una dosis de y_0 [mg] del medicamento a un paciente cuyo cuerpo estaba libre de este medicamento.

- (a) Definiendo $y(t)$ como la cantidad de medicamento en el cuerpo en t , encuentre la ecuación diferencial que modela el problema y resuélvala para obtener la cantidad residual de medicamento al cabo de T hrs.
- (b) Si en $t = T$ se aplica otra dosis del medicamento, nuevamente de y_0 [mg], encuentre la cantidad residual del medicamento en la sangre al cabo de $2T$ hrs.
- (c) Si al final de cada periodo de longitud T se aplica una dosis de y_0 [mg], encuentre la cantidad residual del medicamento al cabo de nT horas, $n \in \mathbb{N}$, y encuentre el valor límite cuando $n \rightarrow \infty$.