

**Control #3 MA26A Ecuaciones Diferenciales Ordinarias**  
**Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.**  
**Semestre 2006-1, Prof. Axel Osses, Prof. Auxiliar: Jorge Lemus**

**P1.-** (a) Calcule  $e^{Mt}$  para  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ . **Indicación:** Defina  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  y calcule  $P^{-1}MP$ .

(b) Sean  $B = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ . Calcular  $e^{Bt}$ .

(c) Encuentre la solución general del sistema  $X' = AX$  para  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . **Indicación:** Calcule vectores propios y vectores propios generalizados.

**P2.-** (a) Encuentre los puntos críticos del sistema no lineal

$$\begin{cases} x' = -2x + 3y + xy \\ y' = -x + y - 2xy^2 \end{cases}$$

y escriba los sistemas linealizados en torno a dichos puntos críticos.

(b) Sea  $A(t)$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) una matriz real cuadrada de orden  $n$  con coeficientes variables continuos. Se considera el sistema

$$X' = A(t)X. \quad (1)$$

Se define el *sistema adjunto* como:

$$Y' = -A^T(t)Y. \quad (2)$$

Si  $M(t)$  es una matriz fundamental de (1) y  $N(t)$  es una matriz fundamental de (2), probar que  $N^T M$  es constante y que  $Y^T(t)X(t)$  es constante.

**P3.-** Una nave espacial ha sido atrapada por la fuerza gravitacional de un planeta que se encuentra en el origen. Los propulsores de la nave, debido a esta fuerza gravitacional, no actúan en una dirección fija. Llamando  $x_i(t)$  a la posición de la nave según el eje  $x_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , y  $X = (x_1, x_2, x_3)^T$ , se tiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$X' = \begin{pmatrix} b & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix} X$$

(a) Encuentre la solución del sistema anterior en función del parámetro  $b \in \mathbb{R}$ .

(b) ¿Para qué valores de  $b$  la nave escapará de la atracción del planeta? Es decir, independientemente de la posición inicial de la nave (que no puede ser  $(0, 0, 0)$ ), se tiene que  $|X(t)| \rightarrow +\infty$  si  $t \rightarrow +\infty$ .

(c) En el caso que  $b$  cumpla la condición anterior, ¿cuál es la condición inicial para que la nave escape más rápido? ¿Por qué con esta condición inicial la trayectoria de la nave es una línea recta?