Guía de Ejercicios Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Aux.: Lautaro Rayo

Preguntas 8 y 9

Este ejercicio les entrega un método para resolver sistemas de ecuaciones no lineales de primer orden que cumplan con una propiedad llamada –ser sistema Hamiltoniano.

Primeramente nos dan la ecuación $x''+f(x)=0$ (1) y nos piden demostrar que esta ecuación se expande en un sistema de ecuaciones de primer orden que sea sistema Hamiltoniano y que sea dado por $H(x,y)=\frac{y^2}{2}+V(x)$ (2) donde $V(x)=\int f(x)dx$ (3), la función $H(x,y)$ se llama Hamiltoniano.

Expandiendo (1):

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -f(x) \end{aligned} \quad (4)$$

Donde y es una variable <u>auxiliar</u> (Vean el ejercicio del péndulo no lineal hecho en clases auxiliares si tienen dudas sobre la creación del sistema (4)).

Veamos que este sistema es Hamiltoniano, en efecto:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial H}{\partial y} = y = x` \\ &\frac{-\partial H}{\partial x} = \frac{-\partial V(x)}{\partial x} = -f(x) = y' \end{aligned} \quad (5)$$

Bien, hemos demostrado que el sistema (4) es Hamiltoniano, ¿Qué me importa?, ahora veremos que las soluciones de un sistema Hamiltoniano cumplen una relación que nos simplifica infinitamente los cálculos, en efecto:

$$\begin{aligned} &\frac{dH}{dx} = \frac{\partial H}{\partial x}x' + \frac{\partial H}{\partial y}y' = -y'x' + x'y' = 0 \\ &\Rightarrow H(x,y) = c \\ &\Rightarrow y = \pm\sqrt{2(c - V(x))} \end{aligned} \quad (6)$$

Veamos entonces el ejercicio 9, aquí nos piden diagramas de fase para 4 ecuaciones diferenciales de segundo orden no lineales cuyos sistemas lineales asociados son Hamiltonianos. Luego, para el primer caso $f(x)=x-x^2$ luego $V(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}$

y así $y=\pm\sqrt{2(c-(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}))}$. La constante c tiene que ver con las condiciones iniciales del problema.

Les queda a ustedes esbozar los diagramas de fase.