

PAUTA PREGUNTA 3 CONTROL 1

$$i) W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

Recordar que para cualquier función, si el wronskiano es 0 para todo x , entonces son ld. En particular, si 2 funciones son solución de alguna ecuación diferencial, si el wronskiano es cero en un punto, entonces es cero para todos los puntos, lo que implica que las soluciones son ld.

Si y_1, y_2 tienen un cero en común, entonces el wronskiano se anula en ese punto, por lo que hay dependencia lineal.

Si y_1 e y_2 comparten un máximo o un mínimo, o si incluso el máximo de una esta compartido por el mínimo de la otra, entonces sus derivadas en ese punto son iguales a cero, por lo que también son ld, con lo que se concluye la demostración.

ii) Si las soluciones son li (conjunto fundamental), su wronskiano nunca se anula. En particular nunca cambia de signo.

Sean x_1, x_2 ceros consecutivos de y_2 (con $x_1 < x_2$), o sea, $y_2(x_1) = y_2(x_2) = 0$, y supondremos sin pérdida de generalidad que $W > 0$ (si se toma $W < 0$ es análogo), para todo x .

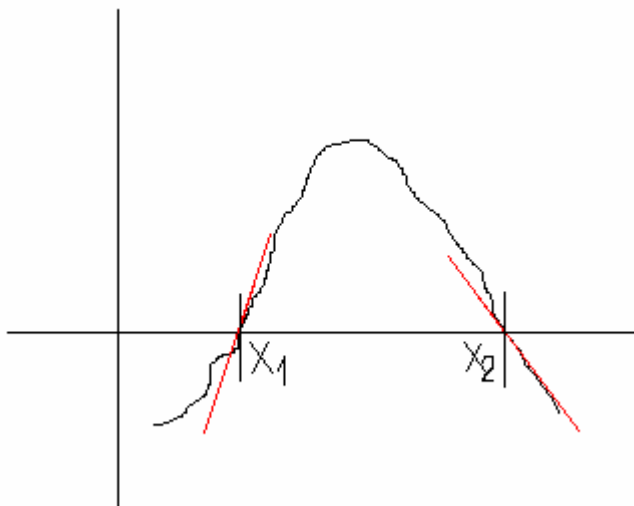
O sea, del wronskiano se desprenden 2 inecuaciones:

$$y_1(x_1)y_2'(x_1) > 0$$

$$y_1(x_2)y_2'(x_2) > 0$$

Claramente todos los términos que aparecen ahí son distintos de cero, pues sin uno lo fuera, el wronskiano se anularía, lo que contradice que las soluciones son li.

Supongamos, nuevamente sin pérdida de generalidad, que $y_2' > 0$ entre x_1 y x_2



Como y_2 es continua en un intervalo acotado (en particular), alcanza su máximo en este intervalo, pero como es cero en los extremos, necesariamente tiene que ser creciente al menos en una vecindad de x_1 , y decreciente en una vecindad de x_2 . Esto implica que $y_2'(x_1) > 0$ y que $y_2'(x_2) < 0$.

Lo anterior implica, por las inecuaciones derivadas del wronskiano, que $y_1(x_1) > 0$ y que $y_1(x_2) < 0$. Como la función es continua, concluimos por el teorema del valor intermedio que en algún punto entre x_1 y x_2 pasa por cero, dado que cambió de signo.

Por último, debemos ver que este cero de y_1 es único. Supongamos que hay 2. Entonces podemos repetir todo el proceso anterior pero cambiando y_1 por y_2 y tomando los dos ceros de y_1 , para concluir que hay otro cero de y_2 , pero esto contradice la hipótesis de que los 2 ceros que tomamos de y_2 son consecutivos.

QED.