



Universidad de Chile  
Escuela de Ingeniería  
Departamento de Ingeniería Matemática

# **SISTEMAS NO LINEALES DE EDO**

## **MA26A**

Axel Osses  
André de Laire

# Índice general

<b>1. Ecuaciones Diferenciales No Lineales</b>	<b>5</b>
1.1. Introducción . . . . .	5
1.2. Existencia y Unicidad . . . . .	7
1.3. Sistemas Cuasilineales . . . . .	10
1.4. Diagramas de Fase . . . . .	17
1.4.1. Sistemas Lineales . . . . .	29
1.5. Estabilidad con funciones de Liapunov . . . . .	41

# Índice de figuras

1.1. Soluciones de equilibrio para el modelo de conejos y ovejas . . . . .	14
1.2. Soluciones de equilibrio del péndulo no lineal . . . . .	15
1.3. Soluciones de equilibrio del péndulo linealizado en torno al origen . . . . .	16
1.4. Intersección de Cónicas . . . . .	17
1.5. Soluciones (1.3) y (1.4) para $k > 0$ . . . . .	19
1.6. Solución del sistema para una condición inicial en el plano de fases $XY$ . . . . .	20
1.7. Diagrama de fase completo para $k = 1$ . . . . .	21
1.8. Diagrama de fase para $k = 2$ . . . . .	21
1.9. Diagrama de fase para $k = -1$ . . . . .	22
1.10. Diagramas de fase de (1.5) para dos condiciones iniciales . . . . .	23
1.11. Soluciones de (1.5) para dos condiciones iniciales . . . . .	24
1.12. Unicidad de la trayectorías . . . . .	24
1.13. Intersección de Recorridos . . . . .	25
1.14. A la izquierda, el recorrido orientado de (1.8), y a la derecha el de (1.9) . . . . .	25
1.15. Trayectorias que convergen al origen . . . . .	26
1.16. Punto silla . . . . .	28
1.17. Diagrama de fase del sistema (1.10). A la izquierda $\alpha < 0$ , $\beta > 0$ , y a la derecha $\alpha > 0$ , $\beta < 0$ . . . . .	29
1.18. Diagrama de fase del sistema (1.10). A la izquierda $\alpha < 0$ , $\beta < 0$ , y a la derecha $\alpha > 0$ , $\beta > 0$ . . . . .	30
1.19. Diagrama de fase del sistema (1.10) para $\alpha = 0$ . A la izquierda $\beta > 0$ , y a la derecha $\beta < 0$ . . . . .	30
1.20. Diagramas de fase de (1.11) para $\lambda_2/\lambda_1 > 1$ . . . . .	32
1.21. Diagramas de fase de (1.11) para $\lambda_2/\lambda_1 < 1$ . . . . .	33
1.22. Diagramas de fase de (1.11) para $\lambda_2$ y $\lambda_1 < 1$ de signos distintos. . . . .	33

1.23. Diagramas de fase del modelo de conejos y ovejas . . . . .	35
1.24. Diagramas de fase del péndulo subamortiguado. . . . .	37
1.25. Plano traza/determinante. . . . .	39

# Capítulo 1

## Ecuaciones Diferenciales No Lineales

### 1.1. Introducción

Muchos fenómenos de la naturaleza se comportan de forma un poco más complicada que un sistema de ecuaciones lineales. Por ejemplo, se suele utilizar la aproximación de la Ley de Hooke  $F = -kx$  para modelar resortes, aunque en realidad esta fuerza suele tener otras componentes de orden no lineal, pero que habitualmente son despreciables. En general estas ecuaciones presentan grandes desafíos, pues es bastante complicado encontrarles soluciones explícitas; sin embargo, muchas veces se puede hacer un estudio cualitativo de las soluciones, que nos indique sobre el comportamiento general del sistema no lineal.

**Definición 1.1.1.** Dado  $I$  un intervalo abierto no vacío, y una función  $F : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , se define un sistema de ecuaciones diferenciable de primer orden con condición inicial  $X_0 \in \mathbb{R}^n$  en  $t_0 \in I$ , por:

$$\begin{aligned} X' &= F(t, X), \quad t \in I \\ X(t_0) &= X_0. \end{aligned}$$

Si la función  $F$  es no lineal con respecto a la variable  $X$ , se dirá que es un sistema no lineal (SNL). Si además  $F$  no depende explícitamente de la variable  $t$ , se dirá que es un sistema no lineal autónomo (SNLA).

Se llama vector de estado a  $X(t) \in \mathbb{R}^n$ , que es la solución del sistema en un punto  $t \in I$ .

*Observación.* Dada una función  $F : I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \cdots \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , toda ecuación de orden superior de la forma:

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= h(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(t_0) &= y_0, \quad y'(t_0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}, \end{aligned}$$

se puede llevar mediante un cambio de variables a la forma (SNL). Asimismo si  $h$  no depende explícitamente de  $t$ , se puede llevar a la forma (SNLA).

*Observación.* Un (SNLA) corresponde en el caso mecánico a un movimiento sin forzamiento externo. Adems, en el caso que los coeficientes sean constante, es invariante bajo traslaciones temporales (variable  $t$ ).

**Ejemplo 1.1.1 (El péndulo simple amortiguado).** Un péndulo simple sometido a un ambiente con roce (por ejemplo aire, agua, aceite, etc.) y a una fuerza externa, que queda descrito por la ecuación de movimiento :

$$\begin{aligned} m\theta'' + c\theta' + \frac{mg}{L}\sin(\theta) - f(t) &= 0 \\ \theta(0) &= \theta_0 \\ \theta'(0) &= \theta'_0, \end{aligned}$$

donde  $\theta$  es el ángulo que forma el péndulo con respecto a la vertical y  $c$  el coeficiente de roce, producto de una fuerza de roce viscoso lineal  $\vec{F}_{roce} = -c\vec{v}$ , donde  $v = L\theta'$ . La ecuación anterior es de orden 2, haciendo el cambio de variables:  $x = \theta$ ,  $y = \theta'$ , de donde  $y' = \theta''$ , toma la forma de (SNL):

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -\frac{c}{m}y - \frac{g}{L}\sin(x) + f(t). \end{aligned}$$

La no linealidad se aprecia claramente en el término no lineal  $\sin(\theta)$ :

$$\sin(\lambda\theta_1 + \theta_2) \neq \lambda\sin(\theta_1) + \sin(\theta_2).$$

El (SNLA) del pndulo corresponde al caso en no hay forzamiento externo:

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -\frac{c}{m}y - \frac{g}{L}\sin(x). \end{aligned}$$

□

**Ejemplo 1.1.2 (Atractor de Lorenz).** El siguiente sistema de ecuaciones diferenciales fue un modelo desarrollado por Lorenz, que en principio se proponía tratar de comprender los fenómenos meteorológicos. El modelo atmosférico que utilizó Lorenz consiste en una atmósfera bidimensional rectangular, cuyo extremo inferior está a una temperatura mayor que el superior. De esta manera el aire caliente subirá y el aire frío bajará creándose corrientes que harán un intercambio de calor por convección. Las ecuaciones que describen este proceso son:

$$\begin{aligned} x'(t) &= s(y - x) \\ y'(t) &= rx - y - xz \\ z'(t) &= xy - bz, \end{aligned}$$

donde las variables son:  $x$  que representa el flujo convectivo;  $y$ , la distribución horizontal de temperaturas; y  $z$  la distribución vertical de temperaturas. Además, tenemos tres parámetros que intervienen en las ecuaciones:  $s$  es el cuociente entre la viscosidad y la conductividad térmica;  $r$ , la diferencia de temperaturas entre la capas inferior y superior; y  $b$  el cuociente entre la altura y el ancho del rectángulo. Este es un modelo muy importante que tiene muchas cosas interesantes, pero por ahora sólo notamos que es un sistema autónomo, pero no lineal, pues aparece el término  $xy$ . □

## 1.2. Existencia y Unicidad

Al igual que todo tipo de ecuaciones diferenciales, siempre es interesante saber cuándo existen las soluciones de los problemas analizados. En el caso de ecuaciones no lineales tenemos el siguiente teorema:

**Teorema 1.2.1 (Existencia y unicidad local en tiempo).** *Dado un (SNL), si existe  $\delta > 0$  tal que  $I_0 = \{t \in \mathbb{R} \mid |t - t_0| \leq \delta\} \subseteq I$ , y existe  $r > 0$  tal que  $F(\cdot, X)$  es continua (en  $t$ )  $\forall |t - t_0| \leq \delta$ ,  $\forall |X - X_0| \leq r$ . Si además existe una constante real  $L > 0$  (constante de Lipshitz) tal que:*

$$|F(t, X) - F(t, Y)| \leq L |X - Y|, \quad \forall |X - X_0| \leq r, \forall |Y - Y_0| \leq r, \forall |t - t_0| \leq \delta.$$

*Entonces existen  $M > 0$  y  $\bar{\delta} = \min\{\delta, r/M\}$ , tal que existe una única solución del (SNL)  $X(\cdot) : [t_0 - \bar{\delta}, t_0 + \bar{\delta}] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , que resulta ser continuamente derivable en  $]t_0 - \bar{\delta}, t_0 + \bar{\delta}[$ .*

*Demostración.* Esencialmente esta demostración es análoga a la realizada para el teorema de existencia y unicidad para el caso de sistemas lineales, por que se usará las mismas notaciones entonces definidas.

Puesto que  $F$  es Lipshitz en  $X$ , se tiene la continuidad de esta función en  $X$ , y como por hipótesis es continua en  $t$ , se tiene que en el compacto  $I \times B(X_0, r)$  ( $B(X_0, r)$  denota la bola de centro  $X_0$  y radio  $r$  en norma euclidiana) alcanza su máximo:

$$\max_{|t-t_0| \leq \delta, |X-X_0| \leq r} |F(t, X)| = M.$$

Como antes, el sistema a resolver es equivalente a:

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t F(s, X(s)) ds,$$

por lo que nuestro problema se vuelve a plantear como encontrar un punto fijo de la aplicación:

$$\begin{aligned} \Psi : \mathcal{C}([t_0 - \bar{\delta}, t_0 + \bar{\delta}], \mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathcal{C}([t_0 - \bar{\delta}, t_0 + \bar{\delta}], \mathbb{R}^n) \\ X &\rightarrow \Psi(X), \end{aligned}$$

donde  $\Psi(X)(t) = X_0 + \int_{t_0}^t F(s, X(s)) ds$ ,  $\forall t \in [t_0 - \bar{\delta}, t_0 + \bar{\delta}]$ .

Sin embargo, para tener todas las condiciones del teorema del punto fijo de Banach, introduciremos la norma

$$\|X(\cdot)\|_L = \sup_{|t-t_0| \leq \bar{\delta}} \{e^{-2L|t-t_0|} |X(t)|\},$$

y tomaremos un espacio más reducido:

$$B = \{X(\cdot) \in \mathcal{C}([t_0 - \bar{\delta}, t_0 + \bar{\delta}], \mathbb{R}^n) \mid \max_{|t-t_0| \leq \bar{\delta}} \|X(t) - X_0\|_L \leq r\}.$$

Veamos que efectivamente  $\Psi(B) \subseteq B$ . Sea  $X \in B$  :

$$\begin{aligned} |\Psi(X)(t) - X_0| &\leq \left| \int_{t_0}^t |F(s, X(s))| ds \right| \leq M|t - t_0| \leq M\bar{\delta} \leq r. \\ e^{-2L|t-t_0|} |\Psi(X)(t) - X_0| &\leq e^{-2L|t-t_0|} r \leq r. \end{aligned}$$

Por lo tanto, tomando supremo se concluye:

$$\|\Psi(X)(t) - X_0\|_L \leq r,$$

es decir,  $\Psi(X) \in B$ .

Ahora veamos que la aplicación restringida a este espacio  $\Psi : B \rightarrow B$  es contractante. En efecto, sean  $X_1, X_2 \in B$

$$\begin{aligned} e^{-2L|t-t_0|} |\Psi(X_1)(t) - \Psi(X_2)(t)| &\leq e^{-2L|t-t_0|} \left| \int_{t_0}^t |F(s, X_1(s)) - F(s, X_2(s))| ds \right| \\ &\leq e^{-2L|t-t_0|} L \left| \int_{t_0}^t |X_1(s) - X_2(s)| ds \right| \\ &= e^{-2L|t-t_0|} L \left| \int_{t_0}^t |X_1(t) - X_2(t)| e^{-2L|s-t_0|} e^{2L|s-t_0|} ds \right| \\ &\leq e^{-2L|t-t_0|} L \|X_1(t) - X_2(t)\|_L \left| \int_{t_0}^t e^{2L|s-t_0|} ds \right| \\ &= L \|X_1(t) - X_2(t)\|_L e^{-2L|t-t_0|} \frac{e^{2L|t-t_0|} - 1}{2L} \\ &\leq \frac{1}{2} \|X_1(t) - X_2(t)\|_L. \end{aligned}$$

Por lo tanto, por teorema de punto fijo de Banach, existe un único punto fijo de la aplicación estudiada, o equivalente existe una única solución del problema (SNL)  $X(\cdot) \in \mathcal{C}([t_0 - \bar{\delta}, t_0 + \bar{\delta}], \mathbb{R}^n)$ , que resulta ser continuamente diferenciable sobre el intervalo abierto.  $\square$

En la práctica suele ser más sencillo chequear diferenciableidad que la condición de Lipshitz, por lo que resulta de mucha utilidad el siguiente corolario.

**Corolario 1.2.1.** *Dado un (SNL), si existe  $\delta > 0$  tal que  $I_0 = \{t \in \mathbb{R} \mid |t - t_0| \leq \delta\} \subseteq I$ , y existe  $r > 0$  tal que  $F(\cdot, X)$  es continua (en  $t$ )  $\forall |t - t_0| \leq \delta, \forall |X - X_0| \leq r$ . Si además la función restringida tal que  $\forall |t - t_0| \leq \delta, F_X(\cdot) = F(t, X)$  es  $C^1$ ,  $\forall |X - X_0| \leq r$ . Entonces existen  $M > 0$  y  $\bar{\delta} = \min\{\delta, r/M\}$ , tal que existe una única solución del (SNL)  $X(\cdot) : [t_0 - \bar{\delta}, t_0 + \bar{\delta}] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , que resulta ser continuamente derivable en  $]t_0 - \bar{\delta}, t_0 + \bar{\delta}[$ .*

*Demostración.* Basta notar que por teorema del valor medio (o de los incrementos finitos), se tiene que si definimos para cada  $t$ ;

$$\begin{aligned} F_t : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\rightarrow f(t, x), \end{aligned}$$



entonces:

$$|F_t(Z) - F_t(Y)| \leq \sup_{|X-X_0| \leq r} \|JF_t(X)\| |Z - Y|.$$

Pero

$$\sup_{|X-X_0| \leq r} \|JF_t(X)\| |Z - Y| \leq \sup_{|X-X_0| \leq r, |t-t_0| \leq \delta} \|JF_t(X)\| |Z - Y|,$$

y como además  $JF_t(\cdot)$  es una función continua de  $X$ , y como  $F$  era continua en  $t$ , entonces  $JF_t(X)$  es continua en  $t$  y  $X$  sobre un compacto, por lo tanto se alcanza el máximo, que denotamos por  $L$ . Por lo tanto:

$$|F(t, Z) - F(t, Y)| \leq L|Z - Y|, \quad \forall |t - t_0| \leq \delta, \forall |Z - X_0| \leq r, \forall |Y - X_0| \leq r.$$

Concluimos que  $F$  satisface la condición de Lipschitz, y por tanto se puede aplicar el teorema anterior.  $\square$

*Observación.* El teorema anterior asegura solamente la existencia de una solución local, en una vecindad centrada de  $t_0$ , que no depende del valor de la constante de Lipschitz.

**Ejemplo 1.2.1.** Veamos la siguiente ecuación no lineal definida en todo  $\mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} y' &= -y^2 \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}$$

Claramente cumple todas las hipótesis del teorema en todo subconjunto de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , pues si tomamos la bola  $B(y_0, r) \subseteq \mathbb{R}$ , para algún  $r > 0$ :

$$|-y_1^2 + y_2^2| = |y_2 - y_1||y_2 + y_1| \leq L|y_2 - y_1|,$$

con  $L = 2|y_0| + 2r$ , y

$$\max_{|y-y_0| \leq r} |y^2| = (|y_0| + r)^2.$$

Luego  $\bar{\delta} = \frac{r}{(|y_0|+r)^2}$ . Es fácil ver mediante derivación que la función  $\bar{\delta}(r) = \frac{r}{(|y_0|+r)^2}$ , alcanza su máximo en  $r = |y_0|$ , por lo que  $\bar{\delta} \leq \frac{1}{4|y_0|}$ . Eligiendo el  $r$  señalado, tenemos que en el mejor de los casos el teorema de existencia y unicidad nos garantiza una única solución definida en el intervalo  $[t_0 - \frac{1}{4|y_0|}, t_0 + \frac{1}{4|y_0|}]$ . Sin embargo, por métodos usuales para este tipo de ecuaciones, podemos calcular explícitamente que la solución está dada por:

$$y(t) = \frac{1}{t - t_0 + \frac{1}{y_0}},$$

donde vemos que el intervalo maximal (i.e. el mayor de los intervalos con el orden de la inclusión de conjuntos) donde es posible definir la solución es  $(t_0 - \frac{1}{y_0}, \infty)$ , si  $y_0 > 0$ , y  $(-\infty, t_0 - \frac{1}{y_0})$ , si  $y_0 < 0$ . Pese a esto, tenemos que aunque el problema está bien definido en todo  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , es imposible tener una única solución definida en todo  $\mathbb{R}$ .

*Nota.* De aquí en adelante nos restringiremos a problemas en dos dimensiones y autónomos de la forma (SNLA):

$$\begin{aligned}x' &= F(x, y), \quad x(t_0) = x_0 \\y' &= G(x, y), \quad y(t_0) = y_0,\end{aligned}$$

con  $F$  y  $G$  funciones continuamente diferenciables, por lo que por teorema de existencia y unicidad siempre tendremos una única solución local.

### 1.3. Sistemas Cuasilineales

**Definición 1.3.1.** *Se llama punto crítico (o punto de equilibrio) de un sistema al punto  $(\bar{x}, \bar{y})$  cuando cumple que:*

$$\begin{aligned}F(\bar{x}, \bar{y}) &= 0 \\G(\bar{x}, \bar{y}) &= 0.\end{aligned}$$

*El conjunto de puntos críticos del sistema se denota por*

$$\mathcal{C} = \{(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2 \mid F(\bar{x}, \bar{y}) = G(\bar{x}, \bar{y}) = 0\}.$$

*Un punto crítico  $\bar{x}, \bar{y}$  se dice aislado si existe  $\delta > 0$  tal no existe otro punto crítico en*

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 < \delta\},$$

*de lo contrario se dice que los puntos críticos son densos en torno a  $(\bar{x}, \bar{y})$ .*

Si hacemos una expansión de Taylor en el (SNLA) en torno a un punto crítico  $(\bar{x}, \bar{y})$ , resulta:

$$\begin{aligned}F(x, y) &= F(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y})(x - \bar{x}) + \frac{\partial F}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y})(y - \bar{y}) + f_F(r) \\G(x, y) &= G(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\partial G}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y})(x - \bar{x}) + \frac{\partial G}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y})(y - \bar{y}) + h_G(r),\end{aligned}$$

donde  $r = (x, y) - (\bar{x}, \bar{y})$ , y

$$\begin{aligned}\lim_{r \rightarrow 0} \frac{h_F(r)}{\|r\|} &= 0 \\ \lim_{r \rightarrow 0} \frac{h_G(r)}{\|r\|} &= 0.\end{aligned}$$

Como además  $(\bar{x}, \bar{y})$  es un punto crítico, entonces  $F(\bar{x}, \bar{y}) = G(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ . También hay que notar que las derivadas parciales están evaluadas en el punto crítico, por lo que representan constantes, que denotaremos por:

$$a = \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}), \quad b = \frac{\partial F}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}), \quad c = \frac{\partial G}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}), \quad d = \frac{\partial G}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}).$$

Ahora, si reemplazamos en (SNLA) queda:

$$(SNLA) \begin{cases} x' = a(x - \bar{x}) + b(y - \bar{y}) + h_F(r) \\ y' = c(x - \bar{x}) + d(y - \bar{y}) + h_G(r). \end{cases}$$

Notamos que en este sistema,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) & \frac{\partial F}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \\ \frac{\partial G}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) & \frac{\partial G}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \end{pmatrix} = J(\bar{x}, \bar{y}),$$

donde notación  $J$  viene la matriz Jacobiana de la función:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \rightarrow & \begin{pmatrix} F(x, y) \\ G(x, y) \end{pmatrix} \end{array}$$

evaluada en el punto crítico asociado  $(\bar{x}, \bar{y})$ . La linealización del (SNLA) corresponde al sistema linealizado (SL):

$$(SL) \begin{cases} x' = a(x - \bar{x}) + b(y - \bar{y}) \\ y' = c(x - \bar{x}) + d(y - \bar{y}) \end{cases}$$

Si repetimos este procedimiento para cada punto crítico aislado  $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , tenemos:

$$(SL)_i \begin{cases} x' = a_i(x - \bar{x}_i) + b_i(y - \bar{y}_i) \\ y' = c_i(x - \bar{x}_i) + d_i(y - \bar{y}_i) \end{cases},$$

donde:

$$\begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{x}_i, \bar{y}_i) & \frac{\partial F}{\partial y}(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \\ \frac{\partial G}{\partial x}(\bar{x}_i, \bar{y}_i) & \frac{\partial G}{\partial y}(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \end{pmatrix} = J(\bar{x}_i, \bar{y}_i).$$

**Definición 1.3.2.** Un sistema (SNLA) se dirá cuasilineal en torno a  $(\bar{x}, \bar{y})$  si  $|J(\bar{x}, \bar{y})| \neq 0$ .

**Propiedades 1.3.1.** Dado un (SNLA), y  $(\bar{x}, \bar{y})$  un punto crítico de este sistema:

- (i) Si  $|J(\bar{x}, \bar{y})| \neq 0$ , entonces  $(\bar{x}, \bar{y})$  es el único punto crítico del (SL), donde resulta ser aislado.
- (ii) Si  $|J(\bar{x}, \bar{y})| = 0$ , entonces los puntos críticos del (SL) son densos. Más aún, su lugar geométrico es una recta (que contiene a  $(\bar{x}, \bar{y})$ ) si algún coeficiente del Jacobiano es distinto de cero, y es todo el plano en caso de que el Jacobiano tenga todos sus términos nulos.
- (iii) Si  $|J(\bar{x}, \bar{y})| \neq 0$ , entonces  $(\bar{x}, \bar{y})$  es un punto crítico aislado del (SNLA).

*Demostración.* (i) Para encontrar los puntos críticos del  $(SL)$  basta resolver:

$$\begin{aligned} a(x - \bar{x}) + b(y - \bar{y}) &= 0 \\ c(x - \bar{x}) + d(y - \bar{y}) &= 0, \end{aligned}$$

de donde:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}.$$

Por tanto si  $|J(\bar{x}, \bar{y})| \neq 0$ , entonces podemos invertir, y se tiene que existe una única solución del sistema  $(x, y) = (\bar{x}, \bar{y})$ , y por ser el único, es aislado.

(ii) De lo anterior tenemos que los puntos críticos están dados por:

$$\begin{aligned} ax + by &= a\bar{x} + b\bar{y} \\ cx + dy &= c\bar{x} + d\bar{y}. \end{aligned}$$

Si  $|J(\bar{x}, \bar{y})| = 0$ , i.e.  $ad - bc = 0$ , o equivalentemente  $ad = bc$  siempre tendremos infinitas soluciones, basta multiplicar la primera ecuación por  $d$ , la segunda por  $b$ , y se obtiene:

$$\begin{aligned} adx + bdy &= ad\bar{x} + bd\bar{y} \\ bcx + bdy &= bc\bar{x} + bd\bar{y}, \end{aligned}$$

es decir, son la misma ecuación. Luego la solución es el lugar geométrico:

$$adx + bdy - ad\bar{x} - bd\bar{y} = 0.$$

En el caso  $a \neq 0$  o  $b \neq 0$ , lo anterior no es más que una recta que contiene al punto crítico en torno al cual se linealiza, por lo que siempre dejará de ser aislado.

En el caso  $a = b = 0$ , se obtiene todo el plano  $\mathbb{R}^2$ , donde ningún punto es aislado.

(iii) Por contradicción, supongamos que para todo  $\delta > 0$  existe otro punto crítico del  $(SNLA)$   $(\bar{w}, \bar{z})$  tal que  $|(\bar{x}, \bar{y}) - (\bar{w}, \bar{z})| < \delta$ . Luego por definición de punto crítico se tiene que:

$$\begin{aligned} a(\bar{w} - \bar{x}) + b(\bar{z} - \bar{y}) + h_F(\bar{r}) &= 0 \\ c(\bar{w} - \bar{x}) + d(\bar{z} - \bar{y}) + h_G(\bar{r}) &= 0, \end{aligned}$$

donde  $\bar{r} = (\bar{w}, \bar{z}) - (\bar{x}, \bar{y})$ . Equivalentemente se tiene:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{w} - \bar{x} \\ \bar{z} - \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_F(\bar{r}) \\ h_G(\bar{r}) \end{pmatrix}.$$

Usando que  $|J(\bar{x}, \bar{y})| \neq 0$ , tenemos:

$$\begin{pmatrix} \bar{w} - \bar{x} \\ \bar{z} - \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} h_F(\bar{r}) \\ h_G(\bar{r}) \end{pmatrix}.$$

Tomando norma y acotando, tenemos que:

$$\begin{aligned} \|\bar{r}\| &\leq \|J(\bar{x}, \bar{y})^{-1}\| \sqrt{h_F(\bar{r})^2 + h_F(\bar{r})^2} \\ 1 &\leq \|J(\bar{x}, \bar{y})^{-1}\| \sqrt{\left(\frac{h_F(\bar{r})}{\bar{r}}\right)^2 + \left(\frac{h_F(\bar{r})}{\bar{r}}\right)^2}. \end{aligned}$$

Y como el lado derecho tiende a cero cuando  $\bar{r} \rightarrow 0$ , se tiene una contradicción.

□

**Ejemplo 1.3.1 (Conejos y ovejas).** Supongamos un modelo para la competencia de dos poblaciones de animales: conejos  $x$  y ovejas  $y$ , que luchan por el pasto en un habitat reducido:

$$\begin{aligned} x' &= 60x - 3x^2 - 4xy \\ y' &= 42y - 3y^2 - 2xy. \end{aligned}$$

Los puntos críticos de este sistema se encuentran resolviendo:

$$\begin{aligned} 60x - 3x^2 - 4xy &= 0 = x(60 - 3x - 4y) = 0 \\ 42y - 3y^2 - 2xy &= 0 = y(42 - 3y - 2x) = 0. \end{aligned}$$

Luego tenemos varios casos.

- Si  $x = 0$  entonces  $y = 0$  o  $42 - 3y - 2x = 0$ , de donde obtenemos los puntos:  $(0, 0)$  y  $(0, 14)$ .
- Si  $y = 0$  entonces  $x = 0$  o  $60 - 3x - 4y = 0$ , de donde obtenemos los puntos:  $(0, 0)$  y  $(20, 0)$ .
- Si  $x \neq 0$ ,  $y \neq 0$ , entonces resolvemos

$$\begin{aligned} 60 - 3x - 4y &= 0 \\ 42 - 3y - 2x &= 0, \end{aligned}$$

de donde se tiene  $(\bar{x}, \bar{y}) = (12, 6)$ .

Por tanto,  $\mathcal{C} = \{(0, 0), (0, 14), (20, 0), (12, 6)\}$ .

El conjunto anterior muestra los casos de equilibrios entre ambas poblaciones. El único caso en que pueden existir ambas especies es  $(\bar{x}, \bar{y}) = (12, 6)$ , en el resto, por lo menos una de las especies se extingue, pero aún así todas son soluciones de equilibrio. El Jacobiano en este caso está dado por:

$$J(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 - 6x - 4y & -4x \\ -2y & 42 - 6y - 2x \end{pmatrix}.$$

Se evalúa ahora el Jacobiano en cada punto crítico, para tener un sistema linealizado respectivo:

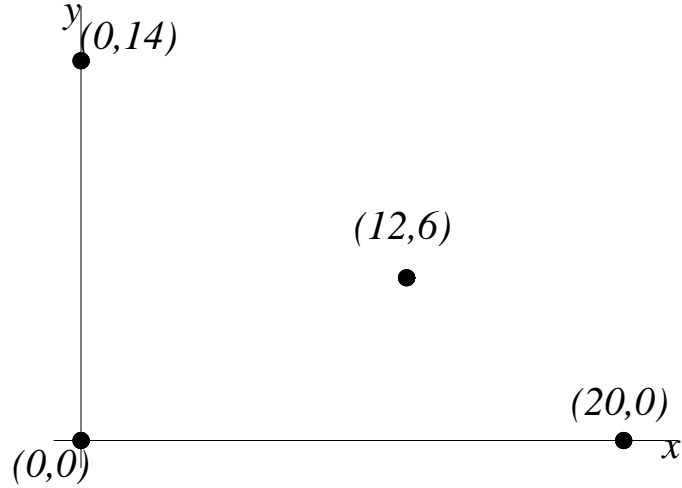


Figura 1.1: Soluciones de equilibrio para el modelo de conejos y ovejas

(i)  $J(0,0) = \begin{pmatrix} 60 & 0 \\ 0 & 42 \end{pmatrix}$  que es invertible:  $ad - bc = 60 \cdot 42 \neq 0$ , y

$$(SL)_1 \begin{cases} x' = 60(x - 0) + 0(y - 0) = 60x \\ y' = 0(x - 0) + 42(y - 0) = 42y \end{cases}$$

(ii)  $J(20,0) = \begin{pmatrix} -60 & -80 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  que es invertible:  $ad - bc = -60 \cdot 2 \neq 0$ , y

$$(SL)_2 \begin{cases} x' = -60(x - 20) - 80(y - 0) \\ y' = 0(x - 20) + 2(y - 0) = 2y \end{cases}$$

(iii)  $J(0,14) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -28 & -42 \end{pmatrix}$  que es invertible:  $ad - bc = -42 \cdot 4 \neq 0$ , y

$$(SL)_3 \begin{cases} x' = 4x \\ y' = -28x - 42(y - 14) \end{cases}$$

(iv)  $J(12,6) = \begin{pmatrix} -36 & -48 \\ -12 & -18 \end{pmatrix}$  que es invertible:  $ad - bc = (-36)(-42) - (-12)(-48) = 72 \neq 0$ , y

$$(SL)_4 \begin{cases} x' = -36(x - 12) - 48(y - 6) \\ y' = -12(x - 12) - 18(y - 6) \end{cases}$$

Finalmente concluimos que el modelo de conejos y ovejas es cuasilineal en torno a todos sus puntos críticos.  $\square$

**Ejemplo 1.3.2.** Habíamos visto que las ecuaciones de un péndulo sin forzamiento están dadas por :

$$\begin{aligned}x' &= y \\ y' &= -\frac{c}{m}y - \frac{g}{L}\sin(x),\end{aligned}$$

cuyos puntos críticos satisfacen:

$$\begin{aligned}0 &= \bar{y} \\ 0 &= -\frac{c}{m}\bar{y} - \frac{g}{L}\sin(\bar{x}),\end{aligned}$$

entonces

$$\bar{y} = 0, \sin(\bar{x}) = 0 \Rightarrow \bar{x} = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Así:

$$\mathcal{C} = \{(k\pi, 0) \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

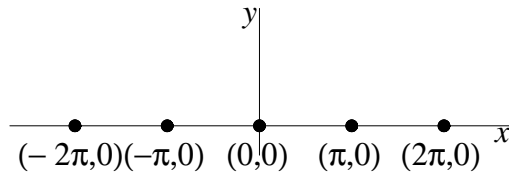


Figura 1.2: Soluciones de equilibrio del péndulo no lineal

El Jacobiano respectivo es:

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L}\cos(x) & -\frac{c}{m} \end{pmatrix} \Rightarrow J(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L}(-1)^k & -\frac{c}{m} \end{pmatrix},$$

que es invertible.

En el caso del péndulo linealizado en torno a cero:

$$\begin{aligned}x' &= y \\ y' &= -\frac{c}{m}y - \frac{g}{L}x,\end{aligned}$$

su único punto crítico es  $(0, 0)$ , es decir

$$\mathcal{C} = \{(0, 0)\}.$$

□

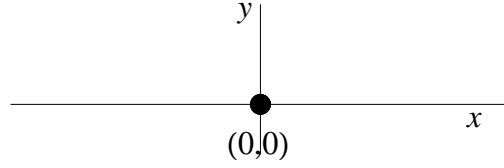


Figura 1.3: Soluciones de equilibrio del péndulo linealizado en torno al origen

**Ejemplo 1.3.3.** Consideremos el sistema autónomo definido para todo  $t \in \mathbb{R}$  por:

$$\begin{cases} x' = x^3 \\ y' = y^3 \end{cases},$$

que tiene el punto crítico aislado  $(0, 0)$ , y

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 & 0 \\ 0 & 3y^2 \end{pmatrix} \Rightarrow J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo que no este sistema no es cuasilineal en torno al  $(0, 0)$ . Si intentamos hacer la linealización en torno a  $(0, 0)$  queda:

$$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \end{cases},$$

cuyos puntos críticos son  $\mathcal{C} = \mathbb{R}^2$ , como efectivamente lo asegura la propiedad (ii) de (1.3.1).  $\square$

**Ejemplo 1.3.4.** Se tiene el (SNLA)

$$\begin{cases} x' = 3x + x^2 + 2y + y^2 \\ y' = 6x - x^2 + 4y + y^2 \end{cases}.$$

Claramente el punto  $(0, 0)$  es un punto crítico. Para ver que es el único (y por tanto es aislado), se puede tratar de resolver explícitamente el sistema, pero esto resulta un poco engorroso. Otra forma es bosquejar un gráfico, dado que cada ecuación no es más que una cónica. Si se completan cuadrados, queda:

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + (y + 1)^2 &= \frac{13}{4} \\ -(x - 3)^2 + (y + 2)^2 &= -5 \end{aligned}$$

que corresponden a una circunferencia y una hipérbola respectivamente. El bosquejo del gráfico sería se puede ver en la Figura 1.4.



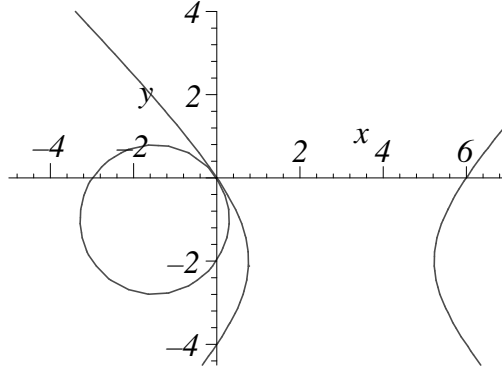


Figura 1.4: Intersección de Cónicas

Para ver que en  $(0, 0)$  las dos curvas efectivamente son tangentes como lo sugiere el gráfico, calculemos la derivada en dicho punto

$$\begin{aligned} 3 + 2x + 2y' + 2yy' &= 0 \Rightarrow y' = -\frac{3 + 2x}{2(1 + y)} \Rightarrow y'(0) = -\frac{3}{2} \\ 6 - 2x + 4y' + 2yy' &= 0 \Rightarrow y' = -\frac{x - 3}{2 + y} \Rightarrow y'(0) = -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

La matriz jacobiana está dada por:

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 3 + 2x & 2 + 2y \\ 6 - 2x & 4 + 2y \end{pmatrix} \Rightarrow J(0, 0) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(J(0, 0)) = 0,$$

por lo que no es cuasilineal, y el  $(SL)$  en torno a  $(0, 0)$  es:

$$\begin{aligned} x' &= 3x + 2y \\ y' &= 6x + 4y, \end{aligned}$$

cuyos puntos críticos estarán dados por:

$$\begin{cases} 3\bar{x} + 2\bar{y} = 0 \\ 6\bar{x} + 4\bar{y} = 0 \end{cases}.$$

Claramente estas ecuaciones son linealmente dependientes, y la solución es el conjunto:  $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -\frac{3}{2}x\}$ , es decir, una recta que pasa por el origen, donde el punto  $(0, 0)$  no es aislado, tal como lo señalaba también la propiedad (ii) de (1.3.1).  $\square$

## 1.4. Diagramas de Fase

Para el estudio de las ecuaciones diferenciales de dos variables  $x, y$  resulta de mucho interés lo que ocurre en el plano  $XY$ , llamado *plano de fase*.

**Definición 1.4.1.** Dado el sistema (lineal o no lineal) autónomo,  $\forall t \in I$ :

$$\begin{aligned}x'(t) &= F(x, y) \\y'(t) &= G(x, y),\end{aligned}$$

dada una condición inicial  $(x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$ ,  $t_0 \in I$ , se llama trayectoria que parte de  $(x_0, y_0)$ , a la función  $\mathcal{T}$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{T}: I_0 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\t &\longrightarrow (x(t), y(t)) .,\end{aligned}$$

donde  $I_0$  es un intervalo de existencia que contiene al que entrega el teorema de existencia y unicidad. Se llama recorrido  $\mathcal{R}$  de esta trayectoria al conjunto imagen o recorrido de la función  $\mathcal{T}$ , es decir:

$$\mathcal{R} = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in I\}.$$

Se denomina diagrama de fases de este sistema autónomo a una colección de recorridos de las trayectorias para un número representativo de condiciones iniciales.

Se define como nullclina de  $x$  al conjunto  $\{(x, y) \mid F(x, y) = 0\}$ , y nullclina de  $y$  al conjunto  $\{(x, y) \mid G(x, y) = 0\}$ .

**Definición 1.4.2.** El diagrama de flujo se constuye al graficar en cada punto  $(x, y)$  el vector  $(F(x, y), G(x, y))$

Con respecto al diagrama de flujo, notemos que por regla de la cadena:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt},$$

entonces:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{G(x, y)}{F(x, y)}.$$

Por tanto el recorrido de la trayectoria es tangente al flujo.

Además, con respecto a las diferentes naturalezas que pueden tener los puntos críticos, se tienen las siguientes definiciones.

**Definición 1.4.3.** Un punto crítico  $(\bar{x}, \bar{y})$  se dice estable si

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \{(\forall (x_0, y_0)) \|(x_0, y_0) - (\bar{x}, \bar{y})\| < \delta \Rightarrow \|(x(t), y(t)) - (\bar{x}, \bar{y})\| < \varepsilon, \forall t > t_0\}.$$

Un punto crítico  $(\bar{x}, \bar{y})$  se dice asintóticamente estable si:

$$(\exists \delta > 0) \left\{ (\forall x_0, y_0) \|(x_0, y_0) - (\bar{x}, \bar{y})\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (\bar{x}, \bar{y}) \right\}.$$

Un punto crítico  $(\bar{x}, \bar{y})$  que no es estable se dice inestable

La estabilidad de un punto crítico quiere decir que la evolución del sistema se mantiene arbitrariamente cerca del punto crítico, si las condiciones iniciales se toman suficientemente cerca del punto.

*Observación.* Un punto asintóticamente estable es estable, pero un punto estable es necesariamente asintóticamente estable.

**Ejemplo 1.4.1.** Si consideramos el sistema:

$$x' = -x \quad (1.1)$$

$$y' = -ky, \quad (1.2)$$

donde  $k > 0$  es una constante, con condiciones iniciales:  $x(0) = x_0$ ,  $y(0) = y_0$ , que tiene como solución:

$$x(t) = x_0 e^{-t} \quad (1.3)$$

$$y(t) = y_0 e^{-kt}, \quad (1.4)$$

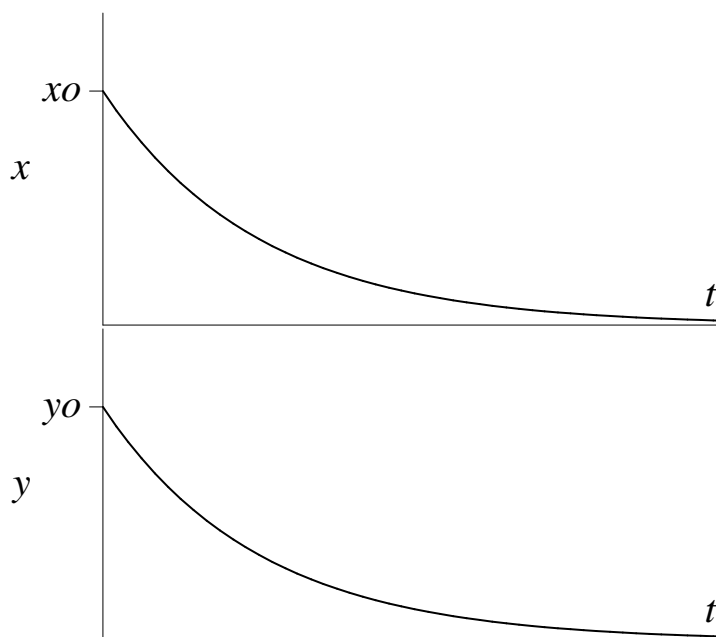


Figura 1.5: Soluciones (1.3) y (1.4) para  $k > 0$

Así tenemos una solución  $(x(t), y(t))$  que depende de  $(x_0, y_0)$ . Consideramos  $x_0 \neq 0$ ,  $y_0 \neq 0$ , pues en el caso que alguna de las condiciones iniciales es nula, esto conduce a la solución idénticamente nula en esa variable, por Teo. de Existencia y Unicidad. Para distintos valores de  $k$ , esta solución tiene distintas formas. Si tomamos  $k = 1$ , resultan las soluciones:

$$x(t) = x_0 e^{-t}$$

$$y(t) = y_0 e^{-t}$$

Dividiendo las ecuaciones:

$$\frac{x(t)}{y(t)} = \frac{x_0}{y_0} \Rightarrow y(t) = \frac{y_0}{x_0}x(t),$$

que representan rectas de pendiente  $\frac{y_0}{x_0}$ , cuyo gráfico en el plano  $XY$  queda ilustrado en la figura 1.6, donde las flechas indican el sentido positivo del tiempo, es decir, tenemos:

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow \begin{cases} x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \end{cases}.$$

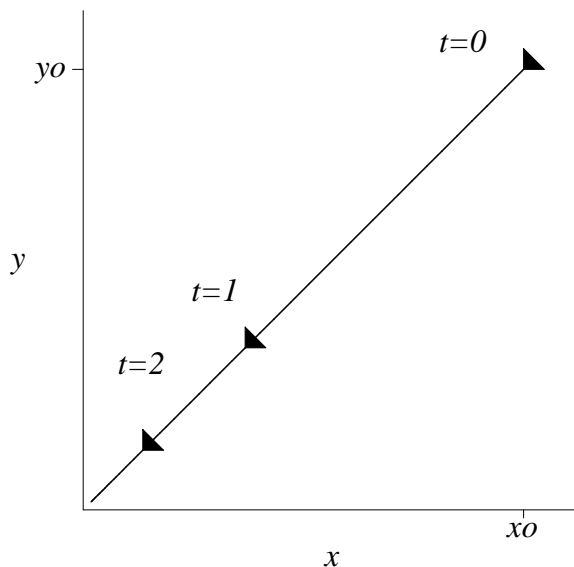


Figura 1.6: Solución del sistema para una condición inicial en el plano de fases  $XY$

La idea de un diagrama de fases es dar una representación de trayectorias dirigidas en el sentido positivo del tiempo en el plano de fases para distintas condiciones iniciales, que se puede obtener al eliminar el tiempo de las ecuaciones.

Entonces tratemos ahora de considerar un rango más amplio de condiciones iniciales, con valores positivos y negativos de  $x_0$  y de  $y_0$ . Finalmente resulta el diagrama de fase de la figura 1.7, donde se aprecia claramente que el punto  $(0,0)$  tiene la particularidad de que sin importar la condición inicial que se tome, siempre se termina en el origen. Esta característica hace que este punto crítico sea asintóticamente estable.

Ahora, si cambiamos el parámetro a  $k = 2$ , resulta:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 e^{-t} \\ y(t) &= y_0 e^{-2t}, \end{aligned}$$

dividiendo las ecuaciones:

$$\frac{x(t)}{y(t)} = \frac{x_0}{y_0} e^t,$$

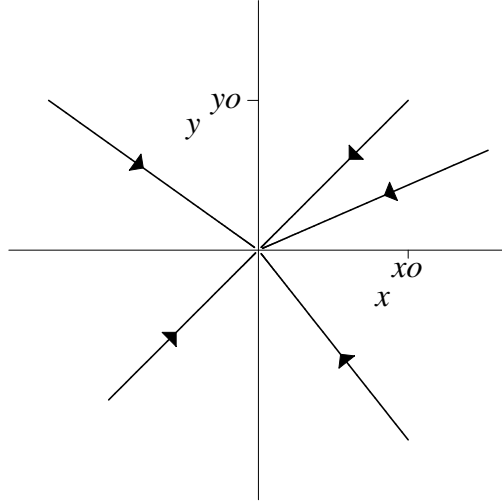


Figura 1.7: Diagrama de fase completo para  $k = 1$

pero  $e^t = \frac{x_0}{x(t)}$ , reemplazando:

$$y(t) = \frac{y_0}{x_0^2} x^2(t).$$

Además se mantiene el comportamiento para tiempos positivos:

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow \begin{cases} x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \end{cases}.$$

El gráfico en el plano  $XY$  queda se ilustra en la figura 1.8, donde se ve claramente que el origen todavía es asintticamente estable.

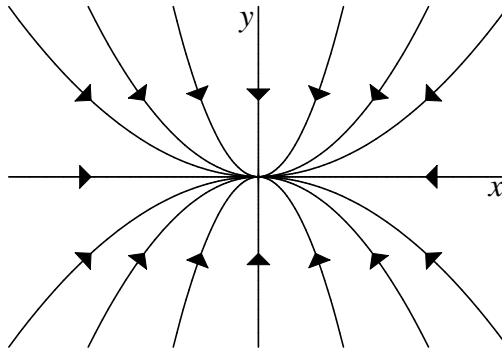


Figura 1.8: Diagrama de fase para  $k = 2$

Si ahora analizamos para  $k = -1$ , tenemos:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 e^{-t} \\ y(t) &= y_0 e^t. \end{aligned}$$

Al multiplicar ambas ecuaciones, y luego despejar  $y$ :

$$y = \frac{x_0 y_0}{x},$$

que corresponden a ecuaciones de hipérbolas, cuando  $x_0 \neq 0$  e  $y_0 \neq 0$ . Además notamos que cuando

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow x \rightarrow 0,$$

y por el contrario, cuando

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow y \rightarrow \begin{cases} +\infty & \text{si } y_0 > 0 \\ -\infty & \text{si } y_0 < 0 \end{cases}$$

En este caso el origen deja de ser asintóticamente estable, puesto que siempre las trayectorias divergen en su componente en el eje  $Y$ , por lo que ahora es un punto inestable.  $\square$

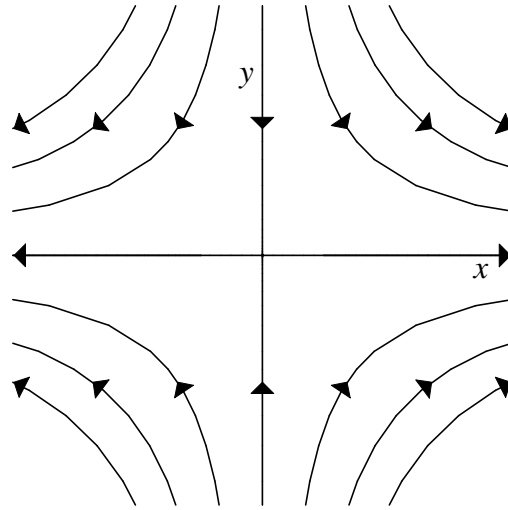


Figura 1.9: Diagrama de fase para  $k = -1$

Hay que notar que permanentemente estamos usando el resultado de Existencia y Unicidad en los diagramas de fase: dado un punto  $(x_0, y_0)$ , entonces la solución del sistema:

$$\begin{aligned} x'(t) &= F(t, x, y) \\ y'(t) &= G(t, x, y) \end{aligned}$$

es única, bajo las hipótesis del Teo. de Existencia y Unicidad para  $F$  y  $G$ . De esta forma existe una única trayectoria  $(x(t), y(t))$  para cada  $(x_0, y_0)$ , esto es, existe una única función para la aplicación:

$$t \rightarrow (x(t), y(t)).$$

Para ejemplificar, tomemos nuevamente el sistema:

$$\begin{cases} x' &= -x \\ y' &= -y, \end{cases} \quad (1.5)$$

en el que si suponemos dos condiciones iniciales distintas  $(x_0, y_0)$  y  $(x_1, y_1)$ , que para simplificar tomaremos  $0 < x_0 < x_1$  y  $0 < y_0 < y_1$ , resultando las soluciones:

$$\begin{cases} x(t) &= x_0 e^{-t} \\ y(t) &= y_0 e^{-t} \end{cases} \quad (1.6)$$

$$\begin{cases} x(t) &= x_1 e^{-t} \\ y(t) &= y_1 e^{-t} \end{cases} \quad (1.7)$$

Y si observamos el plano de fase de (1.5) para estas dos condiciones, aparentemente se tiene la misma solución (ver figura 1.10), pero al graficar separadamente  $x(t)$  e  $y(t)$  en las figura 1.11, para ambas condiciones iniciales se aprecia la diferencia de las soluciones.

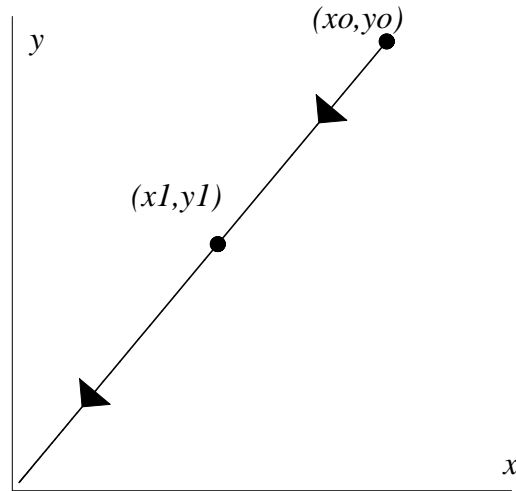


Figura 1.10: Diagramas de fase de (1.5) para dos condiciones iniciales

La explicación es el Teo. de Existencia y Unicidad que dice que las trayectorias son únicas, sin embargo, en el diagrama de fase lo que se grafica es el recorrido de las trayectorias y lo que sucedió en el caso anterior es que dos trayectorias distintas tienen igual recorrido.

Si queremos ver la unicidad de las trayectorias en diagrama de fase, es decir la unicidad de la aplicación que a cada  $t$  le asocia un punto  $(x(t), y(t))$ , tomemos por ejemplo  $t = 0$  y  $t = 1$ .

En la figura 1.12 se aprecia claramente que para dos valores distintos de  $t$ , le corresponden distintos puntos en el diagrama de fases.

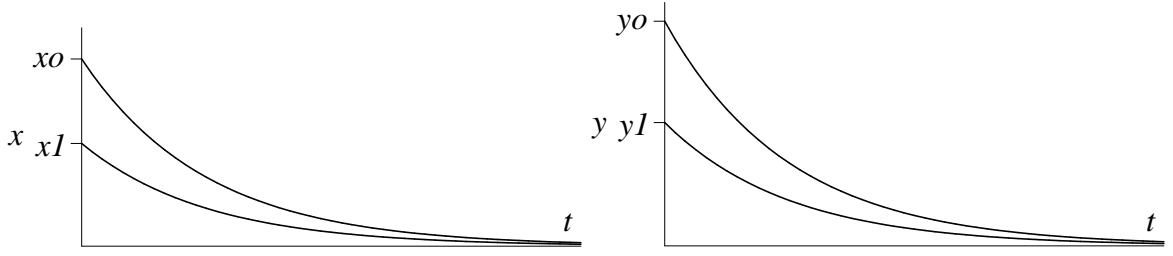


Figura 1.11: Soluciones de (1.5) para dos condiciones iniciales

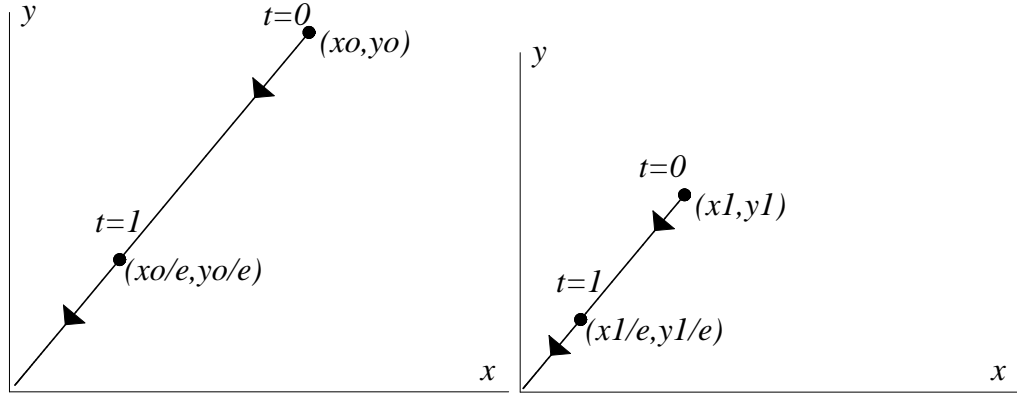


Figura 1.12: Unicidad de la trayectorias

¿Y qué es el punto  $(0, 0)$ ? Si tomamos la condición inicial  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ , por Teo. de Existencia y Unicidad, deducimos la solución es la función nula:  $x(t) \equiv 0, y(t) \equiv 0, \forall t$ , es decir, tenemos una trayectoria constante, que a cada  $t$  se le asocia el origen:

$$t \longrightarrow (x(t), y(t)) = (0, 0),$$

por tanto su recorrido es el singletón  $\{(0, 0)\}$ . En este caso se da la particularidad de que al tomar está condición inicial el sistema no cambia al cambiar  $t$ , es decir, es un punto de equilibrio del sistema (o punto crítico).

Para completar el análisis general de recorridos y trayectorias, nos preguntamos si se puede dar el caso de que se intersecten dos recorridos de dos trayectorias distintas, como por ejemplo en la figura 1.13.

Lo anterior quiere decir que el punto de intersección  $(x_0, y_0)$  se puede tomar como una condición inicial de un mismo sistema, y resultan dos trayectorias distintas, lo que contradice el teo. de Existencia y Unicidad local. Por tanto, tenemos que en general, en el diagrama de fases a puntos en recorridos distintos de trayectorias diferentes corresponden recorridos que no se intersectan en tiempo finito. Lo que sí se puede dar para dos trayectorias distintas, es que sus recorridos se



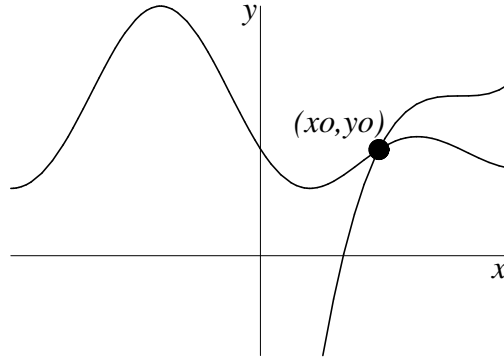


Figura 1.13: Intersección de Recorridos

confundan. Por ejemplo, tomemos la trayectorias:

$$t \rightarrow (x(t), y(t)) = (\sin(t), \cos(t)) \text{ con C.I. } (x(0), y(0)) = (0, 1) \quad (1.8)$$

$$t \rightarrow (x(t), y(t)) = (\cos(t), \sin(t)) \text{ con C.I. } (x(0), y(0)) = (1, 0). \quad (1.9)$$

Para despejar de estas ecuaciones el tiempo, basta elevar al cuadrado y sumar, y así se tiene que tanto (1.8) como (1.9) cumplen que  $x^2 + y^2 = 1$  es decir su recorrido es el mismo conjunto de puntos, pero están orientados en sentidos opuestos, como se ilustra en la figura 1.14.

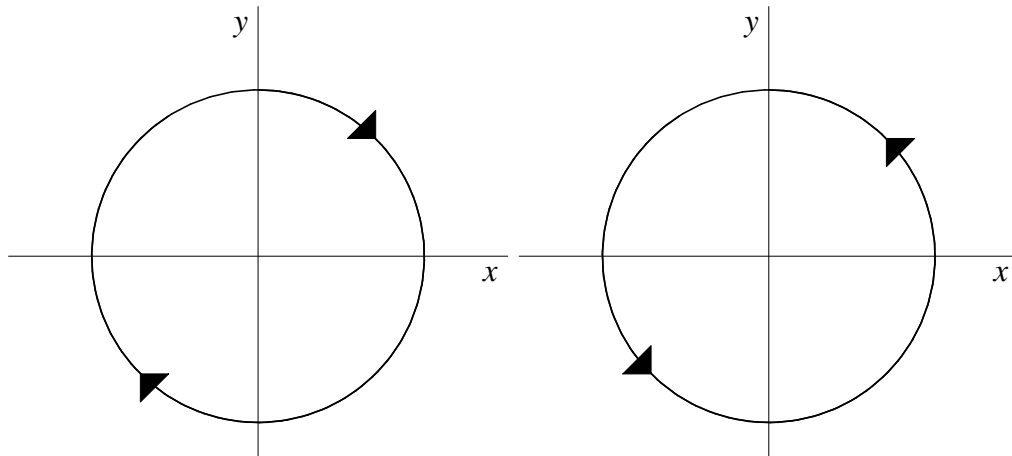


Figura 1.14: A la izquierda, el recorrido orientado de (1.8), y a la derecha el de (1.9)

Si queremos hacer que las dos trayectorias tengan el mismo recorrido, incluyendo el sentido, basta modificar (1.9) a:

$$t \rightarrow (x(t), y(t)) = (\cos(t), -\sin(t)) \text{ con C.I. } (x(0), y(0)) = (1, 0).$$

Concluimos finalmente dos propiedades sobre trayectorias y recorridos.

**Propiedades 1.4.1.** (i) Dada una condición inicial, existe una única trayectoria que parte de ella.

(ii) En un diagrama de fases los recorridos no pueden intersectarse en tiempo finito, o de hacerlo se confunden en un único recorrido (sin orientación).

**Definición 1.4.4.** Se dice que una trayectoria  $t \rightarrow (x(t), y(t))$  converge (o tiende) al punto crítico  $(\bar{x}, \bar{y})$  cuando  $t \rightarrow \infty$  si:

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) &= \bar{x} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) &= \bar{y}.\end{aligned}$$

Análogamente se dice que la trayectoria converge al punto crítico  $(\bar{x}, \bar{y})$  cuando  $t \rightarrow -\infty$  si:

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) &= \bar{x} \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) &= \bar{y}.\end{aligned}$$

Pero puede tenerse casos de trayectorias convergiendo cuando  $t \rightarrow \infty$  de distintas formas, como se muestra en la figura 1.15.

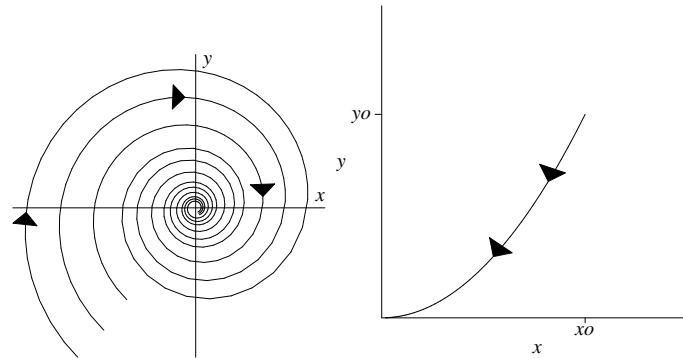


Figura 1.15: Trayectorias que convergen al origen

Vemos que hay una gran diferencia geométrica: en el gráfico izquierdo de la Figura 1.15, la trayectoria se aproxima al origen sin una dirección específica, a diferencia del gráfico derecho, donde claramente tiende a una dirección fija cuando se acerca al origen.

**Definición 1.4.5.** Si además de converger al punto  $(\bar{x}, \bar{y})$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ , la trayectoria es tal que existe

$$l = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t) - \bar{y}}{x(t) - \bar{x}},$$

entonces se dice que la trayectoria entra al punto crítico  $(\bar{x}, \bar{y})$  tangente a una semirrecta cuando  $t \rightarrow \infty$ .

De la misma forma, si además de converger al punto  $(\bar{x}, \bar{y})$  cuando  $t \rightarrow -\infty$  la trayectoria es tal que existe

$$l = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{y(t) - \bar{y}}{x(t) - \bar{x}}$$

se dice que la trayectoria sale del punto crítico  $(\bar{x}, \bar{y})$  tangente a una semirrecta cuando  $t \rightarrow -\infty$ .

**Definición 1.4.6.** Un punto crítico aislado  $(\bar{x}, \bar{y})$  se llama *nodo* si todas las trayectorias vecinas, o bien entran al punto  $(\bar{x}, \bar{y})$ , o bien salen de él.

Por ejemplo, para el sistema:

$$\begin{aligned} x' &= -x \\ y' &= -y, \end{aligned}$$

ya sabemos que las trayectorias convergen a  $(0, 0)$ , y además, cualquier trayectoria vecina que tenga una condición inicial  $(x_0, y_0)$ , tendremos que:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{y_0 e^{-t} - 0}{x_0 e^{-t} - 0} = \frac{y_0}{x_0}$$

Por lo tanto  $(0, 0)$  es efectivamente un nodo.

**Definición 1.4.7.** Un punto crítico aislado  $(\bar{x}, \bar{y})$  se llama *punto silla* si existen dos trayectorias opuestas que convergen a él cuando  $t \rightarrow \infty$ , y existen dos trayectorias opuestas que convergen al mismo punto crítico cuando  $t \rightarrow -\infty$ .

Las restantes trayectorias no convergen, y resultan ser asintóticas a las direcciones antes mencionadas

Como ejemplo, podemos tomar el sistema

$$\begin{aligned} x' &= -x \\ y' &= y, \end{aligned}$$

donde  $(0, 0)$  es punto silla (ver Figura 1.16)

**Definición 1.4.8.** Diremos que un punto crítico es *punto espiral* si todas las trayectorias en una vecindad del punto convergen pero no entran cuando  $t \rightarrow \infty$ , o convergen pero no salen cuando  $t \rightarrow -\infty$ .

Un punto crítico es llamado *centro* si todas las trayectorias en una vecindad del punto son cerradas y existen trayectorias de arbitrariamente cerca del punto.

**Ejemplo 1.4.2.** Consideremos el sistema:

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x + \beta y \\ y' &= -\beta x + \alpha y, \end{aligned} \tag{1.10}$$

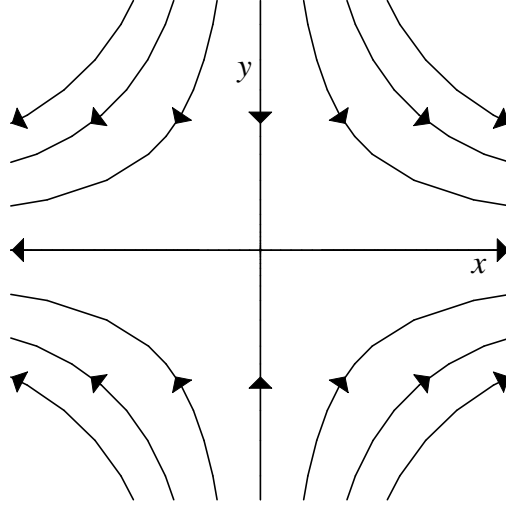


Figura 1.16: Punto silla

con condiciones iniciales  $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$  dadas, que tiene claramente el único punto crítico  $(0, 0)$ . Este es un sistema lineal de matriz

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix},$$

cuyos valores propios son  $\lambda = \alpha \pm i\beta$ , y los vectores propios asociados son:

$$(A - (\alpha + i\beta)I)v_1 = 0 \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$(A - (\alpha - i\beta)I)v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Luego, la  $A$  es diagonalizable, de la forma  $A = PDP^{-1}$ , donde:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}.$$

Así,

$$\begin{aligned} e^{At} &= P e^{Dt} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\alpha t} e^{\beta t} & 0 \\ 0 & e^{\alpha t} e^{-\beta t} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{\alpha t} \frac{e^{i\beta t} + e^{-i\beta t}}{2} & e^{\alpha t} \frac{e^{i\beta t} - e^{-i\beta t}}{2} \\ -e^{\alpha t} \frac{e^{i\beta t} - e^{-i\beta t}}{2} & e^{\alpha t} \frac{e^{i\beta t} + e^{-i\beta t}}{2} \end{pmatrix} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(Observar que

$$\begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix}$$

es una matriz de rotación en un ángulo  $\beta$  )  
 Finalmente, la solución del sistema es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix} e^{\alpha t} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

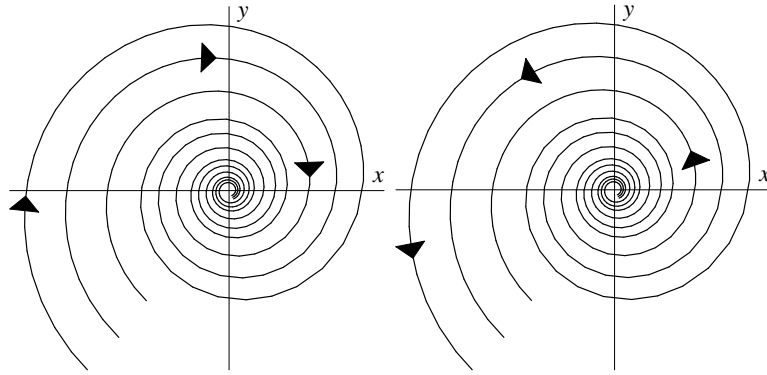


Figura 1.17: Diagrama de fase del sistema (1.10). A la izquierda  $\alpha < 0$ ,  $\beta > 0$ , y a la derecha  $\alpha > 0$ ,  $\beta < 0$ .

De esta forma, vemos que la solución está formada por una ponderación del vector  $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  por  $e^{\alpha t}$ , seguida de una rotación en un ángulo  $\beta t$ . Luego, para bosquejar los diagramas de fase del sistema, sólo es necesario considerar los signos de  $\alpha$  y  $\beta$ , pues nos dirán si las trayectorias se alejan o se acercan del origen, cuando  $\alpha > 0$  o  $\alpha < 0$ , respectivamente; y el sentido de las trayectorias, siendo antihorario u horario, si  $\beta < 0$  o  $\beta > 0$ , respectivamente (ver Figuras 1.17, 1.18, 1.19).

Finalmente de las Figuras 1.17, 1.18, 1.19, concluimos las características del punto crítico  $(0,0)$ : si  $\alpha < 0$  es un punto espiral asintóticamente estable; si  $\alpha > 0$  es un punto espiral inestable; si  $\alpha = 0$  es un centro estable.

□

### 1.4.1. Sistemas Lineales

Nos interesa estudiar ahora con profundidad los sistemas linealizados, puesto que Henri Poincaré demostró que bajo las hipótesis adecuadas, si se logra clasificar cualitativamente un punto crítico, por ejemplo en términos de nodo, espiral, etc., entonces estas mismas características se mantendrán en el sistema original no lineal. Y por otra parte, Alexander Liapunov demostró que bajo ciertas hipótesis, se conservaba la estabilidad asintótica de los puntos críticos al linealizar. Por esta razón, ahora nos avocaremos a los sistemas lineales y pospondremos un momento el enunciado exacto de estos teoremas.

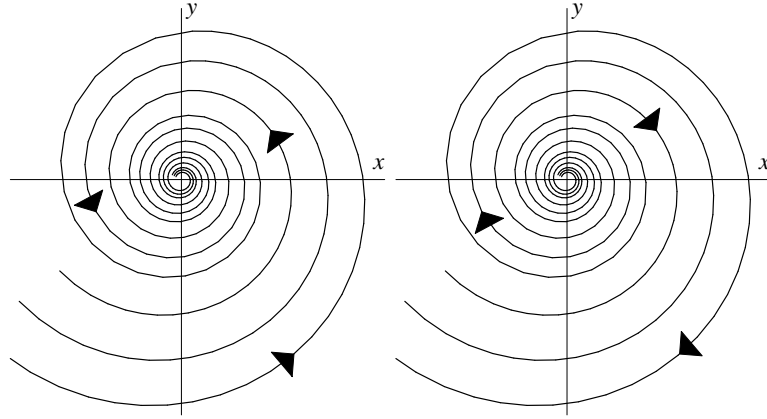


Figura 1.18: Diagrama de fase del sistema (1.10). A la izquierda  $\alpha < 0$ ,  $\beta < 0$ , y a la derecha  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ .

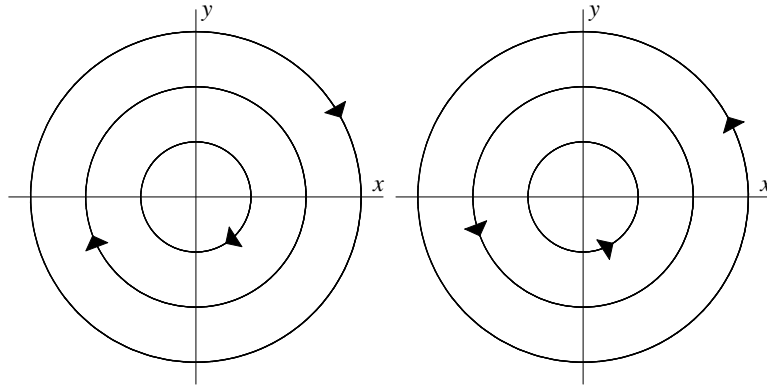


Figura 1.19: Diagrama de fase del sistema (1.10) para  $\alpha = 0$ . A la izquierda  $\beta > 0$ , y a la derecha  $\beta < 0$ .

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer como punto crítico  $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$  (si este no fuera el caso, basta efectuar una traslación), y entonces consideramos el sistema lineal:

$$\begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy, \end{aligned} \tag{1.11}$$

con condiciones iniciales  $x(t_0) = x_0$ ,  $y(t_0) = y_0$ , y con  $ad - bc \neq 0$ , para que de esta forma el punto  $(0, 0)$  sea el único punto crítico del sistema ( y sea aislado).

Tomamos  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  con valores propios  $\lambda_1, \lambda_2$ , esto es, las soluciones de:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \underbrace{(a + d)}_{\text{traza}(A)} \lambda + \underbrace{(ad - bc)}_{\det(A)} = 0,$$

de donde

$$\det(A) = ad - bc = \lambda_1 \lambda_2.$$

Luego la condición  $ad - bc \neq 0$  es equivalente a  $\lambda_1 \neq 0 \wedge \lambda_2 \neq 0$ , por lo que ahora nos concentramos sólo en los valores propios de  $A$ , pudiendo ocurrir los siguientes casos:

(I) Casos Principales

- (i)  $\lambda_1, \lambda_2$  reales,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , de igual signo.
- (ii)  $\lambda_1, \lambda_2$  reales,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , de *distinto* signo.
- (iii)  $\lambda_1, \lambda_2$  complejos conjugados, con parte real no nula.

(II) Casos Frontera

- (i)  $\lambda_1, \lambda_2$  reales,  $\lambda_1 = \lambda_2$
- (ii)  $\lambda_1, \lambda_2$  complejos conjugados, con parte real nula (imaginarios puros)

(I) Casos Principales.

En todos estos casos los valores propios son distintos, por ende la matriz es diagonalizable, es decir, se puede escribir de la forma  $A = PDP^{-1}$ , con

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad P = (v_1 \mid v_2),$$

donde  $v_1, v_2$  son los respectivos valores propios asociados a  $\lambda_1, \lambda_2$ . De esta forma la solución del sistema lineal es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{At} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

$$\text{pero } e^{At} = P e^{Dt} P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Así:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ \underbrace{P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}} &= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \underbrace{P^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{y}_0 \end{pmatrix}} \\ \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{y}_0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De esta forma, el problema se desacopla en estas nuevas coordenadas  $\tilde{x}, \tilde{y}$ , introducidas por la dirección de los vectores propios, resultando simplemente:

$$\tilde{x} = e^{\lambda_1 t} \tilde{x}_0 \tag{1.12}$$

$$\tilde{y} = e^{\lambda_2 t} \tilde{y}_0. \tag{1.13}$$

Como queremos estudiar el diagrama de fase, eliminamos la variable  $t$  de las ecuaciones, elevando (1.12) a  $\lambda_2$ , (1.13) a  $\lambda_1$ , y luego dividiendo:

$$\frac{\tilde{x}^{\lambda_2}}{\tilde{y}^{\lambda_1}} = \frac{e^{\lambda_1 \lambda_2 t} \tilde{x}_0^{\lambda_2}}{e^{\lambda_1 \lambda_2 t} \tilde{y}_0^{\lambda_1}} \Rightarrow \frac{\tilde{x}^{\lambda_2}}{\tilde{y}^{\lambda_1}} = \frac{\tilde{x}_0^{\lambda_2}}{\tilde{y}_0^{\lambda_1}} \Rightarrow \tilde{y} = c_0 \tilde{x}^{\lambda_2/\lambda_1},$$

donde  $c_0 = \frac{\tilde{y}_0}{\tilde{x}_0^{\lambda_2/\lambda_1}}$  es una constante.

Veamos por casos: si algún  $\lambda_i < 0$ , por ejemplo para  $\lambda_2$ , tendremos que en su correspondiente dirección

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{y} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda_2 t} \tilde{y}_0 = 0,$$

y si por el contrario, algún  $\lambda_i > 0$ , por ejemplo para  $\lambda_1$ , tendremos que en su correspondiente dirección:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda_1 t} \tilde{x}_0 = \pm \infty,$$

donde el signo de  $\pm \infty$  está dado por el signo de la condición inicial.

(i)  $\lambda_1, \lambda_2$  reales,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , de igual signo.

Sólo hay dos casos:  $\lambda_2/\lambda_1 > 1$  o  $\lambda_2/\lambda_1 < 1$ .

El bosquejo del diagrama de fases para el caso  $\lambda_2/\lambda_1 > 1$  se tiene en la Figura 1.20. En el gráfico de la izquierda, para  $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$  se tiene estabilidad asintótica, mientras que en el de la derecha, para  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ , el origen es inestable.

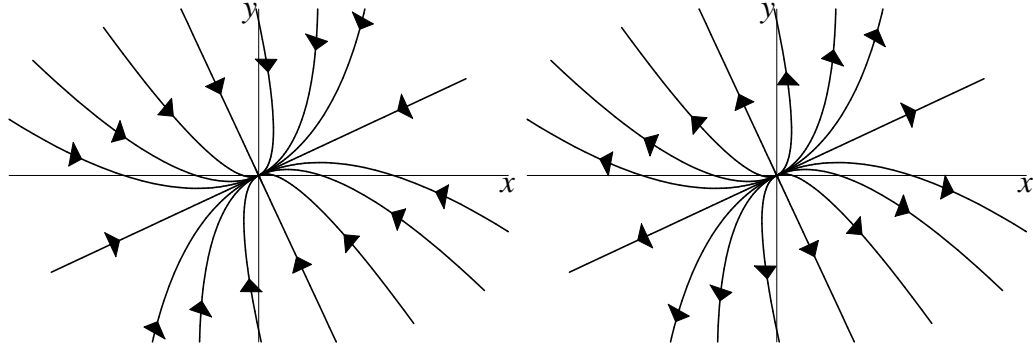


Figura 1.20: Diagramas de fase de (1.11) para  $\lambda_2/\lambda_1 > 1$ .

Para el caso  $\lambda_2/\lambda_1 < 1$ , se tiene la Figura 1.21. En el gráfico de la izquierda, para  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$  se tiene estabilidad asintótica, mientras que en el de la derecha, para  $0 < \lambda_2 < \lambda_1$ , el origen es inestable.

Como conclusión tenemos que en ambos casos el punto  $(0,0)$  es un nodo. Si  $\lambda_1 < 0$  y  $\lambda_2 < 0$ , entonces es asintóticamente estable, mientras que si  $\lambda_1 > 0$  y  $\lambda_2 > 0$ , entonces es inestable. Además, vemos que en general para el caso de valores propios reales distintos de igual signo, los recorridos de las trayectorias son siempre tangentes a la recta dada por la dirección del vector propio asociado al valor propio de menor módulo.

En efecto:



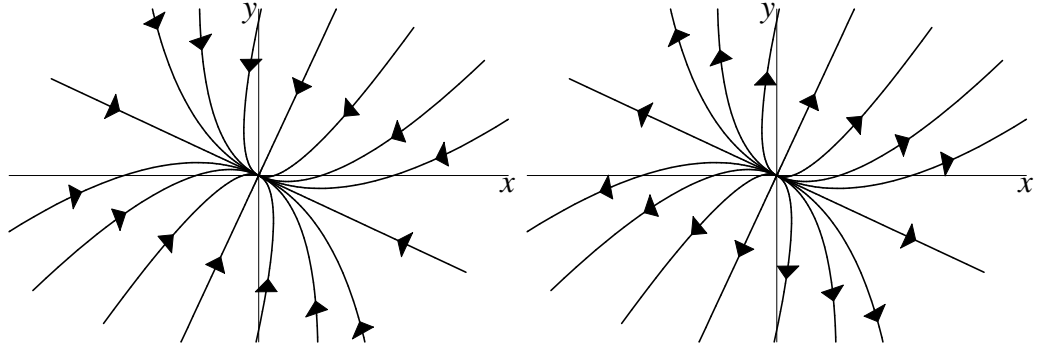


Figura 1.21: Diagramas de fase de (1.11) para  $\lambda_2/\lambda_1 < 1$ .

- $|\lambda_1| < |\lambda_2| \Rightarrow \frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 1 \Rightarrow$  recorrido tangente a  $v_1$ .
- $|\lambda_2| < |\lambda_1| \Rightarrow \frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 1 \Rightarrow$  recorrido tangente a  $v_2$ .

(ii)  $\lambda_1, \lambda_2$  reales,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , de distinto signo.

En este caso tendremos  $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 0$ , y los diagramas de fase serán los de la Figura 1.22, donde el diagrama de la izquierda representa el caso  $\lambda_1 > 0$  y  $\lambda_2 < 0$ , mientras que el de la derecha muestra el caso contrario.

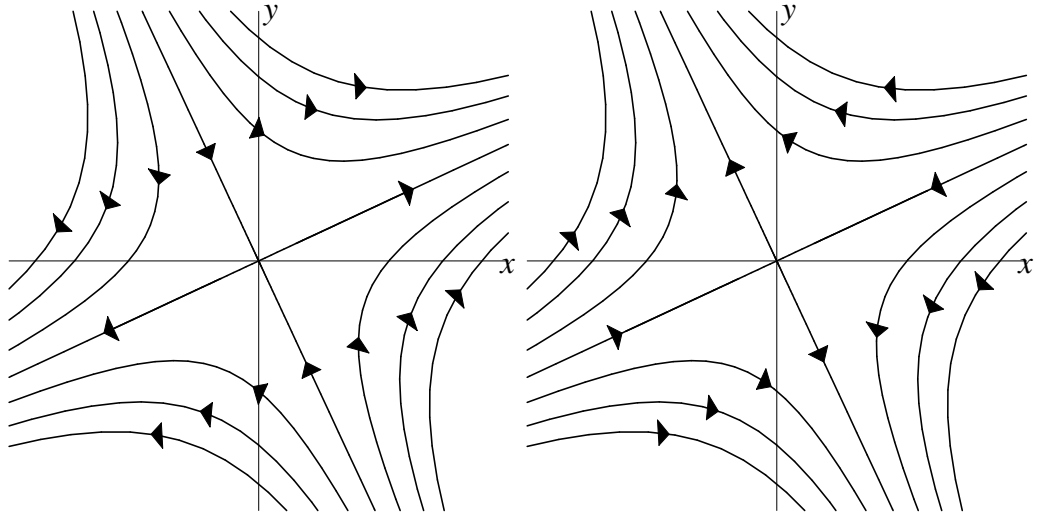


Figura 1.22: Diagramas de fase de (1.11) para  $\lambda_2$  y  $\lambda_1 < 1$  de signos distintos.

En resumen, para valores propios de reales de distinto signo, el punto crítico es un punto silla, inestable, y el eje de las trayectorias convergente corresponde al del vector propio asociado al valor propio negativo.

**Ejemplo 1.4.3 (Continuación de conejos y ovejas).** Volvamos nuevamente al ejemplo

de conejos compitiendo con las ovejas:

$$\begin{aligned}x' &= 60x - 3x^2 - 4xy \equiv F(x, y) \\y' &= 42y - 3y^2 - 2xy \equiv G(x, y),\end{aligned}$$

y sabemos que:

$$\mathcal{C} = \{(0, 0), (0, 14), (20, 0), (12, 6)\}.$$

Vimos que este sistema era casi lineal entorno a estos cuatro puntos críticos, por lo que le podemos analizar los sistemas linealizados, y por los propiedades de Poincaré y Liapunov, sabremos que se mantiene su naturaleza para el (SNLA).

El Jacobiano era:

$$J(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 - 6x - 4y & -4x \\ -2y & 42 - 6y - 2x \end{pmatrix}.$$

Luego en cada punto crítico tenemos:

- a)  $J(0, 0) = \begin{pmatrix} 60 & 0 \\ 0 & 42 \end{pmatrix}$  que tiene los valores propios:  $\lambda_1 = 60$  ,  $\lambda_2 = 42$ , por lo que el punto crítico  $(0, 0)$  es un nodo inestable.

Los vectores propios asociados son

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

respectivamente, por lo que los recorridos de las trayectorias son tangentes a la dirección  $v_2$ .

- b)  $J(20, 0) = \begin{pmatrix} -60 & -80 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  que tiene los valores propios:  $\lambda_1 = -60$  ,  $\lambda_2 = 2$ , por lo que el punto crítico  $(20, 0)$  es un punto silla inestable.

Los vectores propios asociados son

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 80 \\ -62 \end{pmatrix},$$

respectivamente, por lo que el eje de los recorridos de las trayectorias convergentes es la dirección  $v_1$ .

- c)  $J(0, 14) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -28 & -42 \end{pmatrix}$  que tiene los valores propios:  $\lambda_1 = 4$  ,  $\lambda_2 = -42$ , por lo que el punto crítico  $(0, 14)$  es un punto silla inestable.

Los vectores propios asociados son

$$v_1 = \begin{pmatrix} 46 \\ -28 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

respectivamente, por lo que el eje de los recorridos de las trayectorias convergentes es la dirección  $v_2$ .

d)  $J(12, 6) = \begin{pmatrix} -36 & -48 \\ -12 & -18 \end{pmatrix}$  que tiene los valores propios:  $\lambda_1 = -27 - 3\sqrt{73} \approx -52,6$ ,  $\lambda_2 = -27 + 3\sqrt{73} \approx -1,4$  por lo que el punto crítico  $(12, 6)$  es un nodo asintóticamente estable.

Los vectores propios asociados son

$$v_1 = \begin{pmatrix} 16 \\ -3 + \sqrt{73} \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 16 \\ -3 - \sqrt{73} \end{pmatrix},$$

respectivamente, por lo que los recorridos de trayectorias son tangentes a la dirección  $v_2$ .

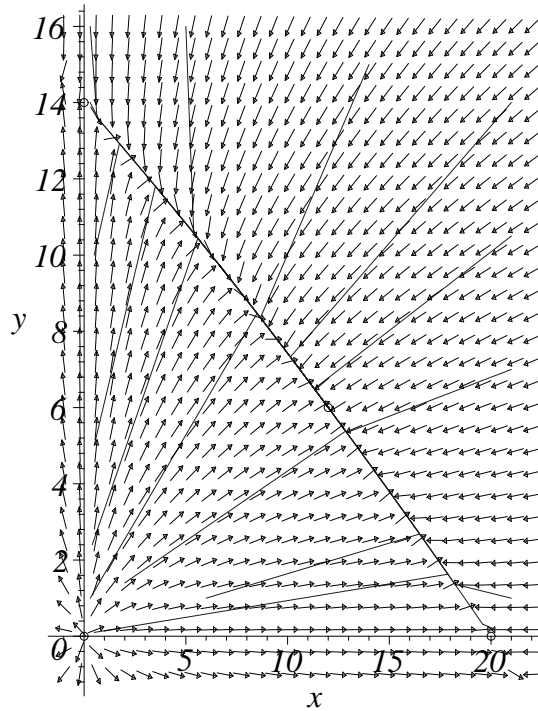


Figura 1.23: Diagramas de fase del modelo de conejos y ovejas

En conclusión tenemos que en el punto  $(0, 0)$  donde ambas especies desaparecen es inestable, al igual que cuando una sola especie sobrevive en los puntos  $(20, 0)$  y  $(0, 14)$ . El punto  $(12, 6)$  es un punto de equilibrio asintóticamente estable, por lo que si tomamos cualquier condición inicial que no sean los otros puntos críticos, tendremos que en un tiempo suficientemente extenso se dará la coexistencia de conejos y ovejas en las vecindades del punto  $(12, 6)$ . El diagrama de fase queda esbozado en la figura 1.23.  $\square$

(iii)  $\lambda_1, \lambda_2$  complejos conjugados, con parte real no nula, esto es:

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta,$$

con  $\alpha \neq 0$  y  $\beta \neq 0$ .

Esto es equivalente (con un cambio de base) al sistema:

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= \alpha \tilde{x} + \beta \tilde{y} \\ \tilde{y} &= -\beta \tilde{x} + \alpha \tilde{y},\end{aligned}$$

notando que las matrices  $\begin{pmatrix} \alpha + i\beta & 0 \\ 0 & \alpha - i\beta \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ , tienen igual polinomio característico. Sin embargo, ya habíamos analizado este caso en el ejemplo (1.4.2), y concluimos que si  $\alpha \neq 0$ , siempre el punto crítico correspondía a un punto espiral, siendo un punto espiral asintóticamente estable cuando  $\alpha < 0$ , y espiral inestable si  $\alpha > 0$ .

**Ejemplo 1.4.4.** Péndulo no lineal Ahora que tenemos más herramientas, seguiremos con el ejemplo del péndulo no lineal.

El sistema:

$$\begin{aligned}x' &= y \\ y' &= -\frac{c}{m}y - \frac{g}{L}\sin(x)\end{aligned}$$

tiene puntos críticos  $\mathcal{C} = \{(k\pi, 0) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ , y el Jacobiano respectivo es:

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L}\cos(x) & -\frac{c}{m} \end{pmatrix} \Rightarrow J(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L}(-1)^k & -\frac{c}{m} \end{pmatrix},$$

por tanto los valores propios dependerán de la paridad de  $k$ :

- $k$  impar:

$$\lambda^2 + \frac{c}{m} - \frac{g}{L} = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} + \frac{g}{L}}.$$

Puesto que todas las constantes físicas del péndulo son positivas, estamos en el caso de valores propios reales de distintos signo, por lo que los puntos críticos resultan ser puntos silla inestables.

- $k$  par:

$$\lambda^2 + \frac{c}{m} + \frac{g}{L} = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{g}{L}}.$$

Ahora es necesario volver a analizar por casos el signo del radicando:

- a) *Sobre amortiguado:* El caso  $\frac{c^2}{4m^2} > \frac{g}{L}$  nos entrega dos valores propios reales distintos, ambos negativos, por lo que los puntos críticos  $(k\pi, 0)$  resultan nodos asintóticamente estables.

- b) *Sub amortiguado*: El caso  $\frac{c^2}{4m^2} < \frac{g}{L}$  nos entrega dos valores propios complejos conjugados, por lo que los puntos críticos  $(k\pi, 0)$  resultan puntos espirales, y como  $\alpha = -\frac{c}{2m} < 0$ , tenemos que además son asintóticamente estables. Este caso corresponde al más común, que ocurre cuando el coeficiente de roce es pequeño (notar que  $\frac{c^2}{4m^2} < \frac{g}{L} \Leftrightarrow c < 2m\frac{g}{L}$ ). Así tenemos que si el péndulo está en posición vertical hacia arriba, que corresponde a los puntos  $k$  impar  $(2(n+1)\pi, 0)$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  es un equilibrio inestable, tal como sabemos de la intuición de que si en esta posición lo perturbamos ligeramente, oscila hasta volver a la posición vertical hacia abajo, que son los puntos espirales asintóticamente estables con  $k$  par  $(2n\pi, 0)$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  (ver Figura 1.24).

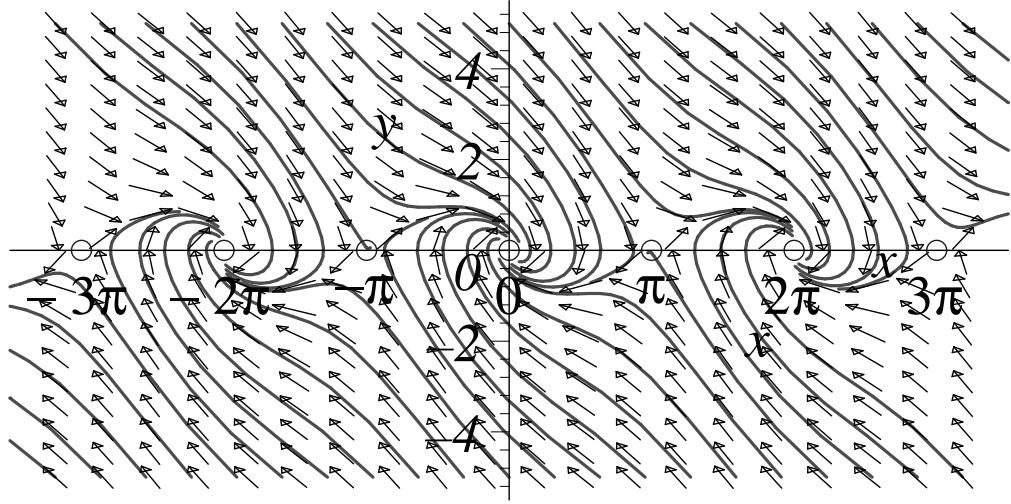


Figura 1.24: Diagramas de fase del péndulo subamortiguado.

- c) *Críticamente amortiguado*: El caso  $\frac{c^2}{4m^2} = \frac{g}{L}$  nos entrega un sólo valor propio real negativo. Este caso aún no lo hemos analizado, por lo que lo pospondremos momentáneamente.

□

## (II) Casos Frontera

- (i)  $\lambda_1, \lambda_2$  reales,  $\lambda_1 = \lambda_2$ .  
Tenemos el sistema

$$\begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy, \end{aligned}$$

con la matriz  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  no es necesariamente diagonalizable (pues tiene el valor propio repetido), pero en este caso siempre se puede llevar a una descomposición  $A =$

$PJP^{-1}$ , con  $J$  una Forma Canónica de Jordan, que puede tener uno o dos bloques. En el caso de tener dos bloques es el caso trivial en que resulta la matriz:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

y de aquí  $e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$ .

Luego, la ecuación en las nuevas coordenadas dadas por los vectores propios generalizados  $v_1, v_2$  es:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{y}_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{x} = e^{\lambda t} \tilde{x}_0 \\ \tilde{y} = e^{\lambda t} \tilde{y}_0 \end{cases}.$$

El diagrama de fase de este caso ya es bien conocido del comienzo del capítulo (ver Figura 1.7 para caso  $\lambda < 0$ ). Es claro que el punto crítico será un nodo asintóticamente estable si el valor propio es negativo, y un nodo inestable si es positivo.

En el caso que resulte un sólo bloque de Jordan, tenemos:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

y entonces

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

De esta forma el sistema en las nuevas coordenadas dadas por los vectores propios generalizados  $v_1, v_2$ , es:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{y}_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{x} = e^{\lambda t} \tilde{x}_0 + te^{\lambda t} \tilde{y}_0 \\ \tilde{y} = e^{\lambda t} \tilde{y}_0 \end{cases}.$$

De aquí se tiene que si  $\lambda < 0$  resulta un nodo asintóticamente estable, y si  $\lambda > 0$ , es un nodo inestable.

De la segunda ecuación del sistema anterior se puede despejar

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{\tilde{y}}{\tilde{y}_0} \right),$$

y reemplazando en la primera se obtiene:

$$\tilde{x} = \tilde{y} \left( \frac{\tilde{x}_0}{\tilde{y}_0} + \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{\tilde{y}}{\tilde{y}_0} \right) \right);$$

si ahora derivamos con respecto a  $\tilde{y}$ :

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{y}} = \left( \frac{\tilde{x}_0}{\tilde{y}_0} + \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{\tilde{y}}{\tilde{y}_0} \right) \right) + \frac{1}{\lambda} = \frac{\tilde{x}_0}{\tilde{y}_0} + t + \frac{1}{\lambda}$$

De esta forma, resulta claro que  $\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{y}} \rightarrow \infty$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , de modo que todas las trayectorias son tangentes a una recta paralela al eje  $\tilde{x}$ .

- (ii)  $\lambda_1, \lambda_2$  complejos conjugados, con parte real nula (imaginarios puros).  
Nuevamente esto equivale (con un cambio de base) al sistema:

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= \alpha \tilde{x} + \beta \tilde{y} \\ \tilde{y} &= -\beta \tilde{x} + \alpha \tilde{y},\end{aligned}$$

tomando  $\alpha = 0$ , y del ejemplo 1.4.2, se tiene el punto crítico resulta ser un centro.

Con esto tenemos analizados todos los casos posibles, en función de los valores propios. Para aplicar todo lo anterior, veamos el siguiente ejemplo que reformula los resultados obtenidos. puede resumir en un diagrama bastante útil, situado en el plano traza/determinante.

**Ejemplo 1.4.5 (Traza-determinante).** Consideremos el sistema lineal  $X' = AX$  con  $A \in M_{2 \times 2}(R)$  matriz constante invertible. Como entre las principales características de una matriz están su determinante y su traza, que determinan un plano traza/determinante (ver Figura 1.25) con distintas regiones, queremos tratar de representar en estas regiones la información sobre único punto crítico que posee, el origen (pues  $A$  es invertible).

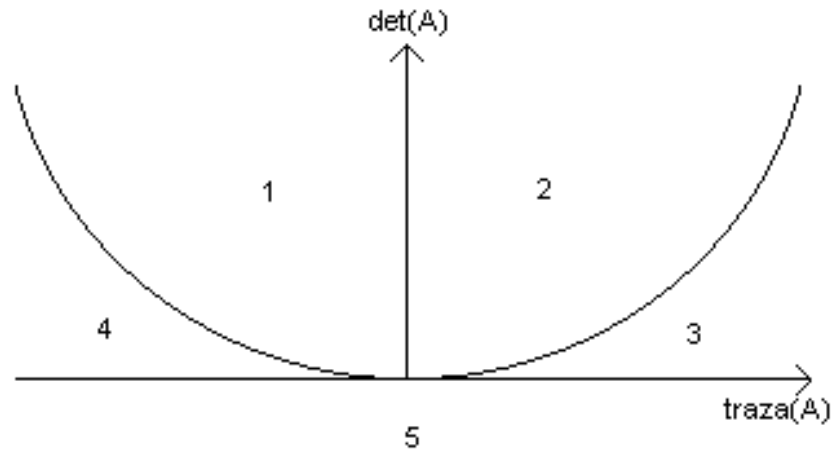


Figura 1.25: Plano traza/determinante.

Podemos escribir la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , cuyo polinomio característico es:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A),$$

con raíces

$$\lambda = \frac{-\text{tr}(A) \pm \sqrt{\text{tr}(A)^2 - 4\det(A)}}{2}.$$

Según vimos, lo primero que habría que distinguir son las raíces reales de las complejas, es decir, estudiar el discriminante

$$\text{tr}(A)^2 - 4\det(A).$$

Como nos interesa el plano traza/determinante, usaremos para simplificar la notación

$$x = \text{tr}(A), \quad y = \det(A);$$

así se ve claramente que la curva  $x^2 - 4y = 0$  es una parábola.

Cuando estemos en el caso  $4y > x^2$  (sobre la parábola), tendremos el caso de raíces complejas conjugadas, y por tanto el punto crítico será un punto espiral si  $x \neq 0$ , siendo estable si  $x > 0$  (zona 2) e inestable en caso contrario (zona 1). Si  $x = 0$ , tenemos un centro.

En el caso  $4y < x^2$  (bajo la parábola), tenemos que separar en casos, según el signo de  $y$  (el determinante):

- $y = \det(A) > 0$

Las raíces son reales y siempre tienen igual signo, y es el signo de  $x$ . Si  $x > 0$ , la parte real de las raíces es negativa, y por tanto tenemos un nodo asintóticamente estable (zona 3), y si  $x < 0$  será inestable (zona 4).

- $y = \det(A) < 0$

Las raíces son reales y siempre tienen distinto signo, por lo que tendremos sólo puntos silla inestables en la zona 5.

Sobre la parábola tenemos el caso  $\text{tr}(A) = \det(A) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$ , por lo que se tienen nodos inestables si  $x > 0$  y nodos asintóticamente estables si  $x < 0$ .

Hemos concluido así una forma que nos permite tener una idea general del punto crítico de un sistema sólo viendo la traza y determinante de la matriz, sin tener que calcular valores y vectores propios (aunque en realidad la traza y el determinante determinan únicamente a los valores propios, y viceversa). Sin embargo, si queremos un gráfico preciso del diagrama de fases es inevitable calcular los vectores propios, pues indican las direcciones de tangencia de las trayectorias.  $\square$

Ahora que ya sabemos como se comporta el sistema lineal en función de sus valores propios, podemos enunciar de forma completa los teoremas de Poincaré y Liapunov:

**Teorema 1.4.1 (Poincaré).** *Sea  $(\bar{x}, \bar{y})$  un punto crítico de un (SNLA) cuasilineal, y  $\lambda_1, \lambda_2$  los valores propios de  $J(\bar{x}, \bar{y})$ , entonces el punto crítico  $(\bar{x}, \bar{y})$  en el (SNLA) será:*



(i) Un nodo si  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ , distintos y de igual signo.

En este caso además todas las trayectorias (excepto dos) son tangentes en  $(\bar{x}, \bar{y})$  a la dirección propia asociada al valor propio de módulo menor. Las otras dos, están sobre la otra dirección propia.

(ii) Un punto silla si  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ , de distinto signo.

En este caso además hay dos trayectorias convergentes a  $(\bar{x}, \bar{y})$  en la dirección propia asociada al valor propio negativo, y dos divergentes en la dirección propia asociada al valor propio positivo. Las demás, tienen como asíntota las direcciones propias.

(iii) Un punto espiral si  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ ,  $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$ ,  $\Re(\lambda_1) \neq 0$  y  $\Re(\lambda_2) \neq 0$

**Teorema 1.4.2 (Liapunov).** Sea  $(\bar{x}, \bar{y})$  un punto crítico de un (SNLA) cuasilineal, y  $\lambda_1, \lambda_2$  los valores propios de  $J(\bar{x}, \bar{y})$ , entonces el punto crítico  $(\bar{x}, \bar{y})$  en el (SNLA) será:

(i) Asintóticamente estable si  $\Re(\lambda_1) < 0$  y  $\Re(\lambda_2) < 0$ .

(ii) Inestable si  $\Re(\lambda_1) > 0$  o  $\Re(\lambda_2) > 0$ .

*Observación.* Por simplicidad en los teoremas anteriores ha hecho referencia a las trayectorias, cuando se quiere referir a su recorrido en el diagrama de fases

Los resultados anteriores son la base del análisis de los sistemas no lineales, pero no nos dicen nada en los casos en que los valores propios toman los valores frontera. Por ejemplo, en el caso del péndulo críticamente amortiguado en que  $\frac{c^2}{4m^2} = \frac{g}{L}$ , el sistema linealizado tenía un sólo valor propio negativo, lo que correspondería a un nodo asintóticamente estable en el sistema lineal, pero no sabemos exactamente que comportamiento sigue en el no lineal.

## 1.5. Estabilidad con funciones de Liapunov

En ramos físicos se suele utilizar mucho la energía de un sistema para determinar los puntos de equilibrio de un sistema. Básicamente las funciones de Liapunov generalizan esos principio en sistemas conservativos: un punto de equilibrio es estable si es un mínimo local la energía potencial efectiva. Veamos nuevamente el ejemplo del péndulo, pero primero supongamos  $c = 0$  ( sin disipación de roce),

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -\frac{g}{L} \sin(x) \end{aligned}$$

La energía cinética de este sistema es:  $K = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}mL^2y^2$ , y la energía potencial  $U = mgL(1 - \cos(\theta)) = mgL(1 - \cos(x))$ , entonces la energía total es:

$$V(x, y) = K + U = \frac{1}{2}mL^2y^2 + mgL(1 - \cos(x))$$

Si derivamos esta función con respecto al tiempo, puesto que  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  usando la regla de la cadena tenemos:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} = mgl \sin(x)x' + mL^2 y'$$

Pero reemplazando  $x', y'$  de las ecuaciones del sistema no lineal, tenemos que

$$\frac{dV}{dt} = 0, \quad \forall t \Rightarrow V(t) = V_0, \quad \forall t$$

Lo que indica que la energía se mantiene constante, y los puntos de mínimo de  $V$  son efectivamente los puntos críticos del sistema  $\{(2k\pi, 0) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ . Si ahora consideramos el péndulo con roce:

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -\frac{c}{m}y - \frac{g}{L}\sin(x) \end{aligned}$$

Las ecuaciones para la energía son exactamente las mismas, por lo que todavía  $V(x, y) = K + U = \frac{1}{2}mL^2 y^2 + mgl(1 - \cos(x))$ , pero si derivamos y luego reemplazamos  $x', y'$  de este sistema amortiguado, tenemos:

$$\frac{dV}{dt} = -cLy^2 \leq 0$$

Encontramos que la energía disminuye con el paso del tiempo, por efecto del roce, y es natural pensar que entonces debe tener más posibilidad de que se le “acabe” la energía y encuentre un punto de equilibrio estable. Es más, antes ya vimos que la posición vertical hacia abajo es punto de equilibrio asintóticamente estable. Esta intuición queda concretizada en el teorema de Liapunov.

**Teorema 1.5.1 (Liapunov).** *Sea  $(\bar{x}, \bar{y})$  un punto crítico aislado de una (SNLA)*

$$\begin{aligned} V : \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\rightarrow V(x, y) \end{aligned}$$

*una función  $C^1$ . Sea  $\mathcal{D}$  una vecindad perforada de  $(\bar{x}, \bar{y})$  (i.e.  $(\bar{x}, \bar{y}) \notin \mathcal{D}$ ) tal que  $V(\bar{x}, \bar{y}) = 0$  y  $V(x, y) > 0, \quad \forall (x, y) \in \mathcal{D}$ . Entonces:*

1. *Si  $\frac{\partial V}{\partial x}F + \frac{\partial V}{\partial y}G \leq 0, \quad \forall (x, y) \in \mathcal{D}$ , entonces  $(\bar{x}, \bar{y})$  es estable.*
2. *Si  $\frac{\partial V}{\partial x}F + \frac{\partial V}{\partial y}G < 0, \quad \forall (x, y) \in \mathcal{D}$ , entonces  $(\bar{x}, \bar{y})$  es asintóticamente estable.*
3. *Si  $\frac{\partial V}{\partial x}F + \frac{\partial V}{\partial y}G > 0, \quad \forall (x, y) \in \mathcal{D}$ , entonces  $(\bar{x}, \bar{y})$  es inestable.*

*Nota.* (i) Las funciones  $F$  y  $G$  del enunciado del teorema son las típicas del (SNLA).

(ii) La función del Teorema anterior se conoce como *función de Liapunov* de un sistema.

*Demostración.* Demostremos primero (i). Dado  $\varepsilon > 0$ , como  $V$  es continua, existe

$$\min\{V(x, y) \mid (x, y) \in \partial\mathcal{B}((\bar{x}, \bar{y}), \varepsilon)\} = m > 0,$$

donde se usa la notación usual  $\mathcal{B}((\bar{x}, \bar{y}), \varepsilon)$  para la bola (euclidiana) de centro  $(\bar{x}, \bar{y})$  y radio  $\varepsilon$ , y  $\partial\mathcal{B}((\bar{x}, \bar{y}), \varepsilon)$  denota su frontera (que es compacta en  $\mathbb{R}^2$ ).

Por la continuidad de  $V$  existe  $\delta > 0$  tal que  $\mathcal{B}((\bar{x}, \bar{y}), \delta) \subseteq \mathcal{B}((\bar{x}, \bar{y}), \varepsilon) \cap (\mathcal{D} \cup (\bar{x}, \bar{y}))$ , tal que  $V(x, y) < m/2, \forall (x, y) \in \mathcal{B}((\bar{x}, \bar{y}), \delta)$ . Tomemos en  $t_0$  la condición inicial  $(x_0, y_0) \in \mathcal{B}((\bar{x}, \bar{y}), \delta)$ , y la trayectoria asociada  $(x(t), y(t))$ . Luego  $V(x_0, y_0) < m/2$ , y además

$$\frac{dV}{dt}(x(t), y(t)) \leq 0, \quad \forall (x(t), y(t)) \in \mathcal{B}((\bar{x}, \bar{y}), \delta),$$

y por tanto

$$\frac{dV}{dt}(x(t), y(t)) \leq 0, \quad \forall t \geq 0,$$

de donde

$$\frac{dV}{dt}(x(t), y(t)) \leq V(x_0, y_0) < m/2, \quad \forall t \geq 0,$$

por lo tanto, como  $(x(t), y(t))$  es una función continua, la curva que describe no intersecta a  $\partial\mathcal{B}((\bar{x}, \bar{y}), \varepsilon)$  para ningún  $t$ . Por lo tanto se tiene la estabilidad de  $(\bar{x}, \bar{y})$ .

Para ver (ii) supongamos que  $(\bar{x}, \bar{y})$  no es asintóticamente estable, pero como de lo anterior sabemos que es estable, tomamos  $\varepsilon > 0$  tal que  $\mathcal{B}((\bar{x}, \bar{y}), \varepsilon) \subseteq (\mathcal{D} \cup (\bar{x}, \bar{y}))$ . Luego existe  $\sigma > 0$  tal que  $(x(t), y(t)) \in \mathcal{B}((\bar{x}, \bar{y}), \varepsilon) \setminus \mathcal{B}((\bar{x}, \bar{y}), \sigma), \quad \forall t \geq t_0$ . Por otro lado:

$$V(x(t), y(t)) = V(x_0, y_0) + \int_{t_0}^t \frac{dV}{ds}(x(s), y(s)) ds,$$

pero por hipótesis

$$\frac{dV}{dt}(x(s), y(s)) = \frac{\partial V}{\partial x}F(x(s), y(s)) + \frac{\partial V}{\partial y}G(x(s), y(s)) < 0,$$

luego tomamos

$$\max\left\{\frac{dV}{dt}(x(s), y(s)) : (x(s), y(s)) \in \mathcal{B}((\bar{x}, \bar{y}), \varepsilon) \setminus \mathcal{B}((\bar{x}, \bar{y}), \sigma)\right\} = -k,$$

con  $k > 0$ . Pero entonces:

$$V(x(t), y(t)) \leq V(x_0, y_0) - (t - t_0)k, \quad \forall t > t_0.$$

Como  $t$  se puede tomar arbitrariamente grande, se tiene que a partir de algún  $\bar{t}$ ,  $V(x(t), y(t)) < 0$ , que es una contradicción.  $\square$

Para el ejemplo del péndulo sin roce la función

$$V(x, y) = \frac{1}{2}mL^2\dot{y}^2 + mgL(1 - \cos(x))$$

claramente se anula en los puntos críticos, y es estrictamente positiva en todos los otros puntos, y vimos que  $\frac{dV}{dt} \equiv 0$ , por lo que por el Teo. anterior, tenemos que los puntos críticos son estables, que es la misma conclusión que obtuvimos con el análisis de linealización del sistema

Para el sistema amortiguado, si tomamos la misma función  $V$  anterior, tenemos que se cumplen las hipótesis del teorema, pero como  $\frac{dV}{dt} = -cL\dot{y}^2 \leq 0$ , sólo podemos concluir que el origen es estable, siendo que sabemos que es asintóticamente estable. En un sistema cualquiera, la función de Liapunov es una herramienta muy útil, pero el problema es que hay que probar con diferentes funciones y tratar de encontrar una que sirva. En el caso de sistemas físicos conservativos, la energía total del sistema es una buena función a considerar, pero ya notamos que en el caso del péndulo amortiguado es otra la “buena” función a considerar.

Considere el péndulo amortiguado, tomando  $\frac{c}{m} = \frac{g}{L} = 1$  para facilitar los cálculos. Según lo discutido cuando se resolvió este péndulo, ya sabemos que los puntos críticos son asintóticamente estables, pues pertenece al caso subamortiguado. Probemos con la función

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x + y)^2 + x^2 + \frac{1}{2}y^2,$$

que claramente cumple con la condición de anularse sólo en el punto  $(x, y) = (0, 0)$ , y es continuamente diferenciable en todo  $\mathbb{R}^2$ , y

$$\frac{dV}{dt} = (x + y + 2x)y - (x + y + y)(y + \sin(x)) = 2xy - y^2 - (x + 2y)\sin(x)$$

Pero del teorema de Taylor sabemos que

$$\sin(x) = x - \frac{\cos(\xi)}{3}x^3$$

donde  $\xi$  está entre 0 y  $x$ . Como para usar el teorema basta encontrar una vecindad del origen, consideremos  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ , con lo que  $0 < \cos(\xi) < 1$ . Reemplazando esto:

$$\frac{dV}{dt} = -(x^2 + y^2) + \frac{\cos(\xi)}{3}x^3(x + 2y)$$

Para esta expresión todavía es difícil establecer si cambia de signo o no, pero notando la simetría radial, hagamos el cambio a coordenadas polares:  $x = r \cos(\theta)$ ,  $y = r \sin(\theta)$

$$\frac{dV}{dt} = -r^2 + \frac{\cos(\xi)}{3}r^4 (\cos(\theta)^4 + 2 \cos(\theta)^3 \sin(\theta))$$

Gruesamente podemos usar la cota:

$$-1 < \cos(\theta)^4 + 2 \cos(\theta)^3 \sin(\theta) < 3$$

y entonces:

$$-\frac{1}{3} < \frac{\cos(\xi)}{3} (\cos(\theta)^4 + 2 \cos(\theta)^3 \sin(\theta)) < 1$$

Luego, tomando  $r < 1$ , se tiene

$$\left| r^2 \frac{\cos(\xi)}{3} (\cos(\theta)^4 + 2 \cos(\theta)^3 \sin(\theta)) \right| < 1$$

de donde se concluye

$$\frac{dV}{dt} = -r^2 \left\{ 1 + r^2 \left( \frac{\cos(\xi)}{3} (\cos(\theta)^4 + 2 \cos(\theta)^3 \sin(\theta)) \right) \right\} < 0$$

en la vecindad  $\mathcal{D} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, (x, y) \neq (0, 0)\}$

Finalmente concluimos por el teorema de estabilidad de Liapunov que el origen es asintóticamente estable.