

Clase Auxiliar 7

1. Consideremos el problema de condición de borde:

$$y'' + n^2 y = 0, \quad x \in (0, 2\pi) \quad (1)$$

$$y(0) = y(2\pi) \quad (2)$$

$$y'(0) = y'(2\pi) \quad (3)$$

Sean ϕ_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ las soluciones de (1)–(3).

(a) Demuestre que

$$\int_0^{2\pi} \phi_n(x) \phi_m(x) dx = 0, \quad m \neq n.$$

(Indicación: $-\phi_n'' = n^2 \phi_n$, $-\phi_m'' = m^2 \phi_m$. Entonces

$$(n^2 - m^2) \phi_n \phi_m = \phi_n \phi_m'' - \phi_m \phi_n'' = [\phi_n \phi_m' - \phi_m \phi_n']'.$$

Integre esta ecuación desde 0 a 2π y use las condiciones de borde satisfechos por ϕ_n, ϕ_m .)

(b) Usando (a) demuestre que

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx dx &= 0, \quad m \neq n \\ \int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx dx &= 0, \quad m \neq n \\ \int_0^{2\pi} \sin nx \cos mx dx &= 0, \quad \forall m, n \end{aligned}$$

2. Encuentre todos los valores λ complejos tales que el problema de condición de borde

$$y'' + \lambda y = 0, \quad x \in (0, \pi)$$

$$y(0) = 0$$

$$y(\pi) = 0$$

tiene una solución no trivial. Calcule las soluciones. Repita el problema cambiando la condición de borde a $y'(0) = 0, y'(\pi) = 0$.

3. ¿Son los siguientes conjuntos de funciones definidas en $(-\infty, \infty)$ linealmente independientes? Explique su respuesta.

(a) $\phi_1(x) = x, \phi_2(x) = x^3, \phi_3(x) = 1.$

(b) $\phi_1(x) = e^{ix}, \phi_2(x) = \operatorname{sen} x, \phi_3(x) = 2 \cos x.$

(c) $\phi_1(x) = x, \phi_2(x) = |x|, \phi_3(x) = e^{2x}.$

4. Demuestre que si p_1, p_2, p_3, p_4 son polinomios de segundo orden entonces estos son linealmente dependientes en $(-\infty, \infty)$.