

Clase Auxiliar 6

1. Sean las funciones $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$ definidas para cada $x \in I = (-\infty, \infty)$. Verifique si ϕ_1 , ϕ_2 son linealmente independientes en I .

(a) $\phi_1(x) = x^2, \phi_2(x) = 5x^2$.

(b) $\phi_1(x) = \cos x, \phi_2(x) = e^{ix}$.

(c) $\phi_1(x) = x, \phi_2(x) = |x|$.

2. Sean y_1, y_2 un conjunto fundamental de la ecuación $y'' + ay' + by = 0$. Demuestre que $W(y_1, y_2)$ es una función constante si y solamente si $a = 0$.

3. Encuentre la solución general de las ecuaciones siguientes (salvo en los casos en que se especifica una condición inicial):

(a) $y'' + 4y = \cos x$

(b) $y'' + 9y = \sin 3x, y(0) = 0, y'(0) = 1$

(c) $y'' + y = \frac{1}{\cos x}, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

(d) $y'' + 2iy' + y = x$

(e) $y'' - 4y' + 5y = 3e^{-x} + 2x^2$

(f) $y'' - 7y' + 6y = \sin x$

(g) $y'' + y = 2 \sin x \sin 2x$

(h) $4y'' - y = e^{-x}$

(i) $6y'' + 5y' - 6y = x$

4. Consideremos el operador

$$\mathcal{L}(y) \equiv y'' + a_1 y' + a_2 y, \quad (1)$$

con constantes reales a_1, a_2 . Llamaremos $p(\lambda) = \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2$ la ecuación característica de (1).

(a) Si A, α are constantes y $p(\alpha) \neq 0$ demuestre que la ecuación $\mathcal{L}(\phi) = Ae^{\alpha x}$ tiene una solución de la forma $Be^{\alpha x}$.

- (b) Demuestre que si ϕ_1, ϕ_2 resuelven

$$\mathcal{L}(\phi_1) = q_1(x), \quad \mathcal{L}(\phi_2) = q_2(x)$$

entonces

$$\mathcal{L}(\phi_1 + \phi_2) = q_1(x) + q_2(x).$$

- (c) Encuentre la solución general de

$$\mathcal{L}(y) = A_1 e^{\alpha_1 x} + A_2 e^{\alpha_2 x}$$

donde $p(\alpha_1) \neq 0, p(\alpha_2) \neq 0$.

5. Consideremos el operador \mathcal{L} definido por (1) y su ecuación característica $p(\lambda)$ (Problema 2). Supongamos que A, ω son constantes reales tal que $p(i\omega) \neq 0$.

- (a) Demuestre que la ecuación $\mathcal{L}(y) = Ae^{i\omega x}$ tiene una solución dada por

$$y(x) = \frac{A}{|p(i\omega)|} e^{i(\omega x - \alpha)}$$

donde $p(i\omega) = |p(i\omega)|e^{i\alpha}$.

- (b) Sea $y(x)$ una solución cualquiera de $\mathcal{L}(y) = Ae^{i\omega x}$. Demuestre que $y_1 = \operatorname{Re} y, y_2 = \operatorname{Im} y$ resuelven

$$\mathcal{L}(y_1) = A \cos \omega x, \quad \mathcal{L}(y_2) = A \sin \omega x$$

- (c) Usando (a), (b) demuestre que $y_p(x) = B \cos(\omega x - \alpha)$ es una solución particular de

$$Ly'' + Ry' + \frac{1}{C}y = E \cos \omega x$$

donde $L, R, C, E > 0$ son constantes reales.

- (d) Supongamos $R^2 C < 2L$. Encuentre ω tal que la amplitud B en (c) tiene el valor máximo posible.

6. Consideremos \mathcal{L} dado en (1). Sean λ_1, λ_2 raíces distintos de p tal que $\operatorname{Re} \lambda_1 < 0$ y $\operatorname{Re} \lambda_2 < 0$.

- (a) Demuestre que cada solución de $\mathcal{L}(y) = q(x)$ es acotada por $x > 0$ si la función continua $q(x)$ satisface

$$|q(x)| < k, \quad x > 0$$

donde $k > 0$ es una constante.

- (b) Si se tiene $\lim_{x \rightarrow \infty} q(x) = 0$ entonces cada solución satisface $\lim_{x \rightarrow 0} y(x) = 0$.

7.

- (a) Demuestre que la función $y_n(x) = \sin nx$ es una solución de la ecuación (problema de valor de frontera)

$$y'' + n^2 y = 0, \quad y(0) = 0, y(\pi) = 0,$$

donde $n = 1, 2, \dots$

- (b) Usando (a) demuestre que

$$\int_0^\pi \sin nx \sin mx \, dx = 0, \quad m \neq n.$$

(Indicacion: $-y_n'' = n^2 y_n$, $-y_m'' = m^2 y_m$. Entonces

$$(n^2 - m^2)y_n y_m = y_n y_m'' - y_m y_n'' = [y_n y_m' - y_m y_n']'.$$

Integre esta ecuación desde 0 a π y use las condiciones de frontera satisfechos por y_n, y_m .)