

Clase Auxiliar 5

1. Encuentre la solución general de las ecuaciones siguientes (salvo en los casos en que se especifica una condición inicial):

(a) $y'' + a^2y = 0$

(b) $y'' - 2ay' + a^2y = 0$

(c) $y'' + 4y = 0, y(0) = 1, y'(0) = -1$

(d) $y'' - 10y' + 25y = 0, y(0) = -1, y'(0) = 1$

2. Ecuación

$$x^2y'' + axy' + by = 0, \quad x > 0$$

con constantes reales a, b se llama ecuación de Euler.

(a) Sea $y(x)$ la solución de ecuación de Euler. Definimos $\phi(s) = y(e^s)$. Demuestre que ϕ satisface la siguiente ecuación de coeficientes constantes

$$\frac{d^2\phi}{ds^2} + (a-1)\frac{d\phi}{ds} + b\phi = 0.$$

(b) Encuentre la solución general de

$$x^2y'' + 2xy' - 6y = 0$$

(c) Encuentre la solución del problema de condición inicial

$$2x^2y'' + xy' - y = 0, \quad y(1) = 1, y'(1) = -1$$

En los ejercicios siguientes consideraremos la ecuación

$$\mathcal{L}(y) \equiv y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0, \quad x \in (a, b) \quad (1)$$

3. Demuestre que la función

$$\phi(x) = e^{\int_{x_0}^x p(s) ds}, \quad x_0, x \in (a, b)$$

es una solución de (1) si y solamente si p satisface la siguiente ecuación no lineal de primer orden (ecuación de Riccati)

$$p' = -p^2 - a_1(x)p - a_2(x).$$

4. Considere la ecuación (1). Sean $\{y_1, y_2\}$ y $\{\phi_1, \phi_2\}$ dos conjuntos fundamentales de (1). Demuestre que existe una constante $k \neq 0$ tal que

$$W(y_1, y_2)(x) = kW(\phi_1, \phi_2)(x).$$

5. Considere la misma ecuación (1). Demuestre que las funciones $a_1(x)$, $a_2(x)$ están determinadas unicamente por cualquier conjunto fundamental $\{\phi_1, \phi_2\}$. (Trate de resolver el sistema de las ecuaciones $\mathcal{L}(\phi_1) = 0$, $\mathcal{L}(\phi_2) = 0$ para ϕ_1, ϕ_2 .)