

Clase Auxiliar 4

1. Considerése un cuerpo que cae bajo la acción de la gravedad en un medio que ofrece una resistencia proporcional al cuadrado de la velocidad. Demuestre que la velocidad del cuerpo tiende al valor límite $(\frac{mg}{k})^{1/2}$, donde m es la masa del cuerpo, g la constante de gravedad y k la constante de la resistencia del medio.
2. Un tanque contiene 100 litros de agua pura, en cierto instante comienzan a entrar en el tanque 2 litros de agua por segundo con una concentración de 50 gramos del sal por litro. De la mezcla así formada (que se supone uniforme) salen del tanque 2 litros por segundo. Calcule el tiempo que la concentración del tanque tarda en ser de 25 gramos por litro.
3. Cierta sustancia radioactiva se descompone a una velocidad proporcional a la cantidad presente de dicha sustancia. Si sabemos que el período medio de esta sustancia es de 2,000 años, esto es, que la mitad de cualquier cantidad inicial se descompone en 2,000 años, calcule el porcentaje que queda al cabo de 400 años.
4. (Solución de la ecuación lineal de primer orden por el metodo de variación del parametro). Resolver la ecuación

$$y' + p(x)y = q(x) \quad (1)$$

usando el siguiente metodo

- (a) Demuestre que la solución general de la ecuación homogénea

$$y' + p(x)y = 0$$

es

$$y(x) = cy_0(x), \quad y_0(x) = e^{-\int p(x) dx}$$

donde c es una constante arbitraria.

- (b) Busce una solución de (1) que tiene forma $y(x) = u(x)y_0(x)$. Demuestre que se tiene

$$u(x) = \int q(x)e^{\int p(x) dx} dx.$$

5. (Ecuación de Ricatti) Probar que

$$y' - xy^2 + (2x - 1)y = x - 1 \quad (2)$$

se reduce a una lineal por una función $z(x)$ si $y = \frac{1}{z} + 1$. Encuentre $z(x)$ usando el metodo de variación del parametro (Problema 4).