Pauta P3, C3 - MA22A - 2006
J. DÁVILA.

A matriz simétrica a coeficientes reales.

a) (1) Sea $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^t A x$. Verifique que $\nabla f(x) = 2(Ax)^t$

$x = (x_i)_i$ $\quad x^t A x = \sum_i x_i (Ax)_i = \sum_i x_i \sum_j A_{ij} x_j = \sum_{ij} A_{ij} x_i x_j$

$$\frac{\partial f}{\partial x_\ell} = \sum_{i,j} A_{ij} (\delta_{i\ell} x_j + \delta_{\ell j} x_i) \quad \text{con } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$= \sum_j A_{\ell j} x_j + \sum_i x_i A_{i\ell} = (Ax)_\ell + (A^T x)_\ell \underset{\nearrow}{=} 2(Ax)_\ell.$$

A simétrica

$\Rightarrow \quad \nabla f(x) = 2(Ax)^T.$

b) (2) Sea v_1 solución de $\min\limits_{\|x\|^2=1} x^T A x$.

Pruebe que v_1 es vector propio de A

Primero si $\quad h(x) = \|x\|^2 \Rightarrow \nabla h(x) = 2x^T$

$\Rightarrow$ el lagrangeano se escribe como $\mathcal{L}(x,\lambda) = x^T A x - \lambda(\|x\|^2 - 1)$.

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(v_1,\lambda) = 0 \iff 2(Av_1)^T - 2\lambda v_1^T = 0$

$\Rightarrow \quad A v_1 = \lambda v_1 \quad$ i.e. λ es vector propio (existe el multiplicador asociado)

ojo: v_1 es solución $\Rightarrow \nabla \mathcal{L} \underset{v_1}{=} 0$

(c) (2) Sea v_2 solución del problema $\min x^T A x$
s.a. $\|x\|^2 = 1$
$x \cdot v_1 = 0$.

Pruebe que v_2 es vector propio

$\mathcal{L}(x, \bar\lambda, \bar\mu) = x^T A x - \bar\lambda(\|x\|^2 - 1) - \bar\mu\, x \cdot v_1$

$\nabla \mathcal{L}(v_2, \bar\lambda, \bar\mu) = 0 \iff 2(Av_2)^T - 2\bar\lambda v_2^T - \bar\mu v_1^T = 0 \quad$ y $\|v_2\| = 1$

$\Rightarrow \quad 2(Av_2)^T - 2\bar\lambda v_2^T - \bar\mu v_1^T = 0. \quad (*)$

$$\Rightarrow \quad 2 v_{k+1}^T A^T v_l - 2\lambda v_{k+1}^T v_l - \sum_{j=1}^{k} \mu_j v_j^T v_l = 0$$

$v_{k+1}^T v_l = 0$ pues v_{k+1} es solución de P.

y a $v_j^T v_l = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq l \\ 1 & \text{si } j = l. \end{cases}$ (además $A^T = A$)

pues los v_j fueron definidos como esto (ortogonales entre sí)

$$\Rightarrow \quad 2 v_{k+1}^T A v_l - \mu_l = 0$$

y $\quad A v_l = \lambda_l v_l$

$$\Rightarrow \quad 2\lambda_l v_{k+1}^T v_l - \mu_l = 0$$

$\Rightarrow \mu_l = 0$ pues $v_{k+1} \perp v_l$. ($l \in \{1, \dots, k\}$)

luego, dado que este argumento es cierto $\forall l \in \{1, \dots, k\}$

$\Rightarrow \mu_j = 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, k\}$.

y, mirando $(**)$

$\Rightarrow A v_{k+1} = \lambda v_{k+1}$ (i.e. v_{k+1} es vector propio).

De esta forma $v_1, v_2, v_3, v_4 \dots, v_n$ son vectores propios (ortonormales) de la matriz.

ojo: No se puede definir un vector v_{n+1} de esta forma pues el conjunto $B = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|^2 = 1, \ x \cdot v_i = 0 \ \forall i \in \{1, \dots, n\}\} = \{0\}$ dada la def de los v_i

Ahora, para ver que A es diagonalizable solo falta ver que $\exists v_{k+1} \in \mathbb{R}^n$ solución de
$$\min_{\substack{\|x\|^2 = 1 \\ x \cdot v_i = 0 \ \forall i \in \{1, \dots, k\}}} x^T A x$$

lo cual es directo pues $B = \{x, \|x\|^2 = 1 \text{ y } x \cdot v_i = 0 \ \forall i \in \{1, \dots, k\}\}$ es compacto y la función $x^T A x$ es continua.

Para el primer vector (v_1) el problema $\min\limits_{\text{s.a } \|x\|^2 = 1} x^T A x$ tiene solución por el mismo argumento anterior (obs: los $v_1, \dots, v_n$ son base de $\mathbb{R}^n$, o l.i y generan)

(multiplicando por la derecha por v_1)

$$\Rightarrow \quad 2 v_2^T A v_1 - 2 \bar{\lambda} \underbrace{v_2^T v_1}_{0 \ (v_1 \perp v_2)} - \bar{\mu}\, v_1^T v_1 = 0$$

y, $A v_1 = \lambda v_1$

$$\Rightarrow \quad 2 \lambda \underbrace{v_2^T v_1}_{0} - \mu \|v_1\|^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \mu = 0$$

$\Rightarrow$ (mirando $(*)$)

$$2 (A v_2)^T = 2 \bar{\lambda} v_2^T$$

$$\Leftrightarrow \quad A v_2 = \bar{\lambda} v_2$$

i.e. v_2 es vector propio con valor propio $\bar{\lambda}$.

(d) Sean v_1 y v_2 como en la parte anterior.

Se definen $v_3, \dots, v_n$ por recurrencia: dados $v_1, \dots, v_k$ sea v_{k+1} una solución del problema

$$(P) \quad \begin{aligned} \min \ & x^T A x \\ \text{s.a} \ & \|x\|^2 = 1 \\ & x \cdot v_i = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, k\} \end{aligned}$$

Demuestre que $v_3, \dots, v_n$ son vectores propios de A. Deduzca que A es diagonalizable.

Supongamos que $v_1, \dots, v_k$ son vectores propios de A, es decir

$$A v_i = \lambda_i v_i \quad i \in \{1, \dots, k\}. \qquad 2 \leq k < n$$

y probemos que v_{k+1} definido como arriba es vector propio.

v_{k+1} es solución de P, es decir, existen $\lambda, \mu_1, \dots, \mu_k$ t.q.

$$\nabla \mathcal{L}(v_{k+1}, \mu, \lambda) = 0 \quad \text{con} \quad \mathcal{L}(x, \mu, \lambda) = x^T A x - \lambda(\|x\|^2 - 1) - \sum_{j=1}^{k} \mu_j x \cdot v_j$$

$$\nabla \mathcal{L}(v_{k+1}, \mu, \lambda) = 0 \Leftrightarrow 2 (A v_{k+1})^T - 2 \lambda v_{k+1}^T - \sum_{j=1}^{k} \mu_j v_j^T = 0. \quad (**)$$

multiplicamos por la derecha por v_ℓ con $\ell \in \{1, \dots, k\}$

y, notemos que $\|v_{k+1}\| = 1$ pues v_{k+1} es solución de (P)