P2) Cálculo en varias variables Control 1

a) $$f(x) = \begin{cases} x+y & \text{si } x+y \leq 0 \\ \sqrt{x+y} + xy & \text{si } x+y > 0 \end{cases}$$

Hay que determinar los puntos donde f es continua
$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

Definimos $A = \{(x,y) \mid x+y < 0\}$
$B = \{(x,y) \mid x+y > 0\}$

claramente A y B son abiertos y f es continua en $A \cup B$ pues es suma y composición de funciones continuas. (1.5)

El problema está en $\{(x,y) \mid x+y=0\} = C$

si la función fuera continua se deberá cumplir que

$$\underbrace{\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0) \\ (x,y)\in A \\ (x_0,y_0)\in C}} f(x,y)}_{(1)} = \underbrace{\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0) \\ (x,y)\in B,\ (x_0,y_0)\in C}} f(x,y)}_{(2)}$$

veamos los límites

$$(1) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x+y = x_0+y_0 = 0$$

$$(2) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \sqrt{x+y} + xy = x_0 y_0 = -x_0^2.$$

Para que se cumpla que $(1)=(2)$ $\quad -x_0^2 = 0$

o sea, en C, f es solo continua cuando $x_0 = y_0 = 0$

Recopilando f es continua en $A \cup B \cup \{(0,0)\}$. (1.5)

ii) $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ continua

$$g(x) = f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$$

a) Pdq. g alcanza su máximo y mínimo en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Consideremos g restringida a $S = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| = 1\}$

$g: S \longrightarrow \mathbb{R}$ es claramente continua pues

$g(x) = f(x) \ \forall x \in S$, es decir es la restricción de una función continua (f). 0.5

Veamos que S es compacto

- acotado: $S \subseteq B(\vec{0}, 1+\varepsilon)$ $\varepsilon > 0$.
- cerrado. sea $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq S$. con $x_k \longrightarrow x$

dado que la norma es continua $\Rightarrow \|x_k\| \longrightarrow \|x\|$

$\Rightarrow \|x\| = 1 \Rightarrow x \in S$. 0.5

o sea g alcanza su máximo y mínimo en S. 0.5

sólo falta ver que tales máximo y mínimo son también máx y mín en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

Para esto, veamos que $g(S) = g(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ 0.5 (con lo cual el máx y mín en S también lo son en $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$)

$\subseteq$) obvio

$\supseteq$) sea $x \in g(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \Rightarrow \exists\, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tq $g(v) = x$

sea $\tilde{v} = \frac{v}{\|v\|}$

$$g(v) = f\left(\frac{\cancel{\|v\|}\cdot \tilde{v}}{\cancel{\|v\|}\cdot\|\tilde{v}\|}\right) = g(\tilde{v})$$

$\Rightarrow \exists\, \tilde{v} \in S$ Tq $g(\tilde{v}) = g(v) = x \Rightarrow x \in g(S)$

Total 2

ii) b) Pdq.

$\lim_{x\to 0} g(x)$ existe si f es constante en $S=\{x\in\mathbb{R} \mid \|x\|=1\}$

($\Leftarrow$) dado que f es cte en S. $f\equiv c$ en S

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \lim_{x\to 0} c = c.$$

i.e. existe y es igual a c (0.3)

($\Rightarrow$) supongamos que f NO es cte en S

sean $x_1, x_2 \in S$ tq $f(x_1)\neq f(x_2)$

y sea $(\lambda_n)_n$ sucesión tq $\lambda_n \to 0$, $\lambda_n>0$

la sucesión $v_n = \lambda_n x_1$ es tq $v_n \to 0$

y la sucesión $w_n = \lambda_n x_2$ es tq $w_n \to 0$

y $$\lim_{n\to\infty} g(v_n) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{v_n}{\|v_n\|}\right) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{\lambda_n x_1}{\lambda_n\|x_1\|}\right) = f(x_1)$$

y $$\lim_{n\to\infty} g(w_n) = \lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{w_n}{\|w_n\|}\right) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{\lambda_n x_2}{\lambda_n\|x_2\|}\right) = f(x_2)$$

es decir, $\exists$ dos sucesiones $((v_n), (w_n))$ tq

$v_n \to 0$ $\wedge$ $w_n \to 0$

y $\lim_{n\to\infty} g(v_n) \neq \lim_{n\to\infty} g(w_n)$

es decir, el límite no existe (0.7)