Pauta Control 1 MA22A

Pregunta1

(i) $A = \{(x,y)/x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), y > \tan(x)\}$

- $int(A) = A$
- $adh(A) = \{(x,y)/x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), y \geq \tan(x)\} \bigcup \{(x,y)/x = -\frac{\pi}{2}\}$
- $der(A) = adh(A)$
- $Fr(A) = \{(x,y)/x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), y = \tan(x)\} \bigcup \{(x,y)/x = -\frac{\pi}{2}\}$

A es abierto, no cerrado ni compacto.

(ii) $A \subseteq B \Rightarrow adh(A) \subseteq adh(B)$
Existen varias formas:

- Sabemos que $B \subseteq adh(B)$, luego (como $A \subseteq B$), se tiene que $A \subseteq adh(B)$. Como $adh(A) = \bigcap\limits_{\substack{A \subseteq C \\ C \text{cerrado}}} C$, y dado que $adh(B)$ es cerrado, se tiene directamente que $adh(A) \subseteq adh(B)$.
- Sea $x \in adh(A)$. Luego existe $\{x_k\}_{k \in \mathrm{N}} \subseteq A$ tal que $x_k \longrightarrow x$. Como $A \subseteq B$ se tiene que $\{x_k\}_{k \in \mathrm{N}} \subseteq B$. En resumen, existe una sucesión en B que converge a x. Luego, $x \in adh(B)$.
- Sea $x \in adh(A)$. Luego $\forall \varepsilon, B_\varepsilon(x) \bigcap A \neq \phi$. Como $A \subseteq B$, se tiene que $B_\varepsilon(x) \bigcap B \neq \phi$. Como el ε es arbitrario, se tiene que $x \in adh(B)$.

(iii) A abierto $\Rightarrow A + B$ abierto
También existe más de una forma:

- Sabemos que las traslaciones de abiertos, son abiertos. Luego $A + y$ es abierto, $\forall\ y$. Notando que:
$$A + B = \bigcup_{y \in B} A + y$$
se obtiene que $A + B$ es unión arbitraria de abiertos, por lo tanto $A + B$ es abierto.
- Sea $z \in A + B$. Luego existen $x \in A, y \in B$ tal que $z = x + y$. Como A es abierto, existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subseteq A$. Es claro que
$$z \in B_r(x) + y \subseteq A + B.$$
Por otra parte,
$$B_r(x) + y = B_r(x + y),$$
por lo que existe $r > 0$ tal que $B_r(z) \subseteq A + B$, luego $A + B$ es abierto.