Guía de ejercicios, MA22A

Profesor: J. Dávila 27 de marzo de 2006

1. Encuentre el interior, el derivado y la adherencia de $A = \{(t, \sin(\pi/t) : 0 < t \leq 1\}$. ¿Es A abierto, cerrado, compacto?

A tiene interior vacío y no es abierto. $\overline{A} = A \cup S$ donde $S = \{(0, y) : |y| \leq 1\}$, por lo que A no es cerrado, ni compacto. $der(A) = \overline{A}$.

2. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ tal que A es abierto y $\mathbb{R}^n \setminus A$ es abierto. Supongamos además que A es no vacío y $\mathbb{R}^n \setminus A$ es no vacío. Sea $x_0 \in A$, $x_1 \in \mathbb{R}^n \setminus A$ y $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } (1-t)x_0 + tx_1 \in A \\ 0 & \text{si } (1-t)x_0 + tx_1 \notin A. \end{cases}$$

a) Pruebe que g es continua.

b) ¿Cuánto valen $g(0)$, $g(1)$?

c) Encuentre una contradicción con el teorema del valor intermedio y concluya el siguiente resultado: si $A \subset \mathbb{R}^n$ es tal que A es abierto y $\mathbb{R}^n \setminus A$ es abierto, entonces A es vacío o todo $\mathbb{R}^n$.

c) Observe que $g(t)$ es cero o uno.

3. Para los conjuntos A siguientes determine si A es abierto, cerrado y/o compacto. Encuentre $adh(A)$, $int(A)$, $der(A)$.

a)

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \|(x, y)\| = \frac{1}{n},\ n \text{ entero },n \geq 1 \right\}.$$

A no es abierto ni cerrado. $adh(A) = A \cup \{(0, 0)\}$, $int(A) = \emptyset$.

b) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 2\}$

A es compacto, no es abierto. $int(A) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 < 1,\ 0 < z < 2\}$.

4. Para $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ se define $A + B = \{x + y \,/\, x \in A,\ y \in B\}$.

a) Pruebe que si A es cerrado y B es compacto entonces $A + B$ es cerrado.

b) Encuentre un ejemplo donde A y B sean cerrados pero $A + B$ no lo sea.

5. Pruebe, utilizando la caracterización $\varepsilon - \delta$ de límites, que

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^3}{x + y} = \frac{1}{2}.$$

6. Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ a & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

a) Encuentre a de modo que f sea continua en $\mathbb{R}^2$.

b) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ en todo punto $(x,y) \neq (0,0)$.

c) Calcule, si existen, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

d) ¿Son $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ continuas?

7. Para la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y}{x}\sin(x^2+xy) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

encuentre los puntos de $\mathbb{R}^2$ donde f es continua.
¿Es posible redefinir f sobre el conjunto $\{(0,y) \,/\, y \in \mathbb{R}\}$ de manera que sea continua?

8. Pruebe que existe un paralelepípedo de aristas $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ cuya superficie es 1 y su volumen es máximo.

El problema se puede formular como maximizar $f(x,y,z) = xyz$ sobre el conjunto $A = \{(x,y,)\,/\,x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, xy + xz + yz = \frac{1}{2}\}$.

9. Considere $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2 \leq 4\}$, $D_2 = \{(x,y)\,/\,4 < x^2+y^2 \leq 9\}$. Para $\lambda \in \mathbb{R}$ se define

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2-\lambda & \text{si } (x,y) \in D_1 \\ 0 & \text{si } (x,y) \in D_2. \end{cases}$$

a) Encuentre λ tal que f sea continua en $D_1 \cup D_2$. De ahora en adelante se utilizará este valor de λ.

b) Demuestre que el grafo de f

$$G(f) = \{(x,y,f(x))\,/\,(x,y) \in D_1 \cup D_2\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

es compacto.

c) Pruebe que dado cualquier $(x_0,y_0,z_0) \in \mathbb{R}^3$ existe un punto $(x,y,f(x,y))$ del grafo de f que minimiza la distancia al (x_0,y_0,z_0).

10. Pruebe que la función $f(x,y) = x^4 + y^2 - 2xy$ tiene un mínimo en $\mathbb{R}^2$.

Utilice $|2xy| = |2(2x)\frac{y}{2}| \leq 4x^2 + \frac{y^2}{4}$ para verificar que $\lim_{\|(x,y)\| \to +\infty} f(x,y) = +\infty$.

11. Para $a \in \mathbb{R}$ se define

$$f_a(x) = (x^2-1)^2 + ax.$$

a) Verifique que $\lim_{|x| \to \infty} f_a(x) = +\infty$.

b) Muestre que dado cualquier $a \in \mathbb{R}$, f_a alcanza su mínimo.

c) Definamos $g(a) = \min_{x \in \mathbb{R}} f_a(x)$. Verifique que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua.

Dados $a_0 > 0$ y $M > 0$ existe R tal que para $|x| \geq R$ y $|a| \leq a_0$ se tiene $f_a(x) \geq M$. Si $a_k \to a$ se puede encontrar x_k acotada tal que $g(a_k) = f_{a_k}(x_k)$.