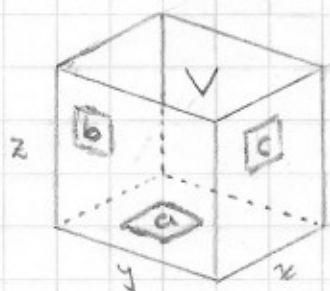


b)



Sean entonces x, y, z las dimensiones del cajón como muestra la figura, en la que se especifica también el costo por metro cuadrado de cada cara. El costo de la caja está dado por:

$$f(x, y, z) = axy + 2byz + 2cxz$$

Obs: bien se pudo definir $f = axy + 2bxz + 2cyz$. Da lo mismo.

Ahora, el volumen de la caja debe ser $V = xyz$
 luego $z = \frac{V}{xy}$ Esta es nuestra restricción.

Entonces, el costo es función de dos variables:

$$f(x, y) = axy + \frac{2bV}{x} + \frac{2cV}{y} \quad (0,5 \text{ pto por hacer bien el planteamiento})$$

Derivadas de primer orden:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ay - \frac{2bV}{x^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = ax - \frac{2cV}{y^2}$$

Derivadas de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{4bV}{x^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{4cV}{y^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = a = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

*: Este paso lo podemos dar pues sabemos que $x > 0$, $y > 0$

5

(x, y) es punto crítico de f si $\nabla f(x, y) = (0, 0)$

$$ay - \frac{2bV}{x^2} = 0, \quad ax - \frac{2cV}{y^2} = 0$$

Multiplicamos cada ecuación por x^2 y y^2 :

$$acx^2y = 2bV, \quad abxy^2 = 2cV$$

Por transitividad: $acx^2y = abxy^2 \Rightarrow cx = by$

$$\Rightarrow y = \frac{c}{b}x \quad \text{Reemplazando en la primera ecuación:}$$

$$ay = \frac{2bV}{x^2} \Rightarrow \frac{acx}{b} = \frac{2bV}{x^2} \Rightarrow x^3 = \frac{2b^2V}{ac}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{2b^2V}{ac}} \Rightarrow y = \sqrt[3]{\frac{2c^2V}{ab}} \quad (1, 0 \text{ pto})$$

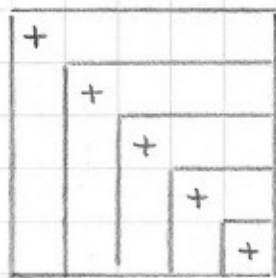
Evaluamos las segundas derivadas (las cruzadas son constantes):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4bV \frac{ac}{2b^2V} = \frac{2ac}{b}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4cV \frac{ab}{2c^2V} = \frac{2ab}{c}$$

Matriz Hessiana

$$Hf = \begin{bmatrix} \frac{2ac}{b} & a \\ a & \frac{2ab}{c} \end{bmatrix}$$



Una matriz es definida positiva si los determinantes de los bloques que se muestran en la figura son todos positivos

El determinante del Hessiano es

$$2 \frac{ab}{b} \cdot 2 \frac{ab}{c} - a \cdot a = 4a^2 - a^2 = 3a^2$$

El determinante del bloque inferior derecho es obviamente $2 \frac{ab}{c}$. Ambos son positivos pues a, b, c lo son.

Así, $(x, y) = \left(\sqrt[3]{\frac{2b^2V}{ac}}, \sqrt[3]{\frac{2c^2V}{ab}} \right)$ es mínimo local de f (1,0 pto)

Notar que f es creciente para x, y positivos; así que el mínimo local es global.

El costo mínimo de la caja es:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= a \sqrt[3]{\frac{2b^2V}{ac} \cdot \frac{2c^2V}{ab}} + 2bV \sqrt[3]{\frac{ac}{2b^2V}} + 2cV \sqrt[3]{\frac{ab}{2c^2V}} \\ &= 2\sqrt[3]{4abcV^2} + \sqrt[3]{4abcV^2} + \sqrt[3]{4abcV^2} = 3\sqrt[3]{4abcV^2} // \end{aligned}$$

Obs: $z = \frac{V}{xy} = \sqrt[3]{\frac{a^2V}{4bc}}$ (0,5 pto)

[Handwritten signature]