

Pauta Control N°2P3/a) Tenemos la función $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$F(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2 + 4$$

Derivadas de primer orden:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 6x = 3(x^2 - 2x + y^2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 6xy - 6y = 6(x-1)y \quad (0,2 \text{ pts})$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 6x - 6$$

$$\text{Gradiente: } \nabla F(x, y) = (3(x^2 - 2x + y^2), 6(x-1)y)$$

Derivadas de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 6x - 6 = 6(x-1)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 6x - 6 = 6(x-1)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 6y = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = 6y \quad (0,3 \text{ pts})$$

Matriz
Hessiana:

$$HF(x, y) = 6 \begin{bmatrix} x-1 & y \\ y & x-1 \end{bmatrix}$$

Busquemos los puntos críticos de F : aquellos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $\nabla F(x, y) = (0, 0)$

$$3(x^2 - 2x + y^2) = 0, \quad 6(x-1)y = 0$$

$$6(x-1)y = 0 \Rightarrow x=1 \vee y=0$$

Ahora nos pondremos en uno u otro caso para estudiar la otra ecuación:

$$\text{Caso } x=1: \quad x^2 - 2x + y^2 = 0 \Rightarrow -1 + y^2 = 0 \Rightarrow y = \pm 1$$

$$\Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = 1 \vee y = -1$$

$$\text{Caso } y=0: \quad x^2 - 2x + y = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow x=0 \vee x=2$$

Soluciones: $(0,0); (2,0); (1,1); (1,-1)$ (0,3 pts)

Evaluemos el Hessiano en los puntos críticos

$$H_F(0,0) = 6 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{Sea } \vec{F} \neq \vec{0} \text{ cualquiera}$$

Evaluemos la forma cuadrática:

$$\vec{F}^T \cdot H \cdot \vec{F} = (-6x, -6y) \cdot (x, y) = -6(x^2 + y^2) < 0$$

$H_F(0,0)$ es matriz definida negativa

$(0,0)$ es un máximo local de F . (0,3 pts)

(0,1)

$$HF(2,0) = G \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Forma cuadrática:

$$\vec{F}^T \cdot H \cdot \vec{F} = G(x,y) \cdot (x,y) = G(x^2 + y^2) > 0$$

$HF(2,0)$ es matriz definida positiva

$(2,0)$ es mínimo local de F

(0,3 pts)

$$HF(1,1) = G \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Forma cuadrática:

$$\vec{F}^T \cdot H \cdot \vec{F} = G(y,x) \cdot (x,y) = G(yx + xy) = 12xy$$

(El signo depende de x e y)

$HF(1,1)$ no es definida positiva ni negativa

$(1,1)$ es punto silla.

(0,3 pts)

$$HF(1,-1) = G \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Forma cuadrática:

$$\vec{F}^T \cdot H \cdot \vec{F} = G(-y, -x) \cdot (x,y) = -12xy$$

(El signo depende de x e y)

$HF(1,-1)$ no es definida positiva ni negativa

$(1,-1)$ es punto silla.

(0,3 pts)

Evaluemos F en cada punto:

$$F(0,0) = 4$$

$$F(1,1) = 2$$

$$F(2,0) = 0$$

$$F(1,-1) = 2$$

(0,5 pts)