Guía de Problemas No. 2

P1. Considerar la función

$$F(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Mostrar que

a) existen $\frac{\partial F}{\partial x}(0,0)$ y $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)$.
b) Si $g(t)=(at,bt)$ para ctes a y b, entonces $F\circ g$ es diferenciable y $(F\circ g)'(0)=\frac{ab^2}{a^2+b^2}$ pero $\nabla F(0,0)\cdot g'(0)=0$.
Este es un ejemplo que la regla de la cadena no se aplica si F no es diferenciable.

P2. Sea $F:I\!R^2\to I\!R$. Para cada x defina $g_x:I\!R\to I\!R, g_x(y)=F(x,y)$. Suponga que para cada x existe un único y tal que $g_x'(y)=0$. Si se denota $y=c(x)$ y se supone que es diferenciable, demostrar:

(a) Si $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y)\neq 0 \quad \forall (x,y)$ entonces:

$$c'(x)=\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial y dx}(x,c(x))}{\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,c(x))}$$

(b) Si $c'(x)=0$, entonces existe un $\bar{y}$ tal que

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}(x,\bar{y})=0\wedge\frac{\partial F}{\partial y}(x,\bar{y})=0$$

P3. ¿Por qué esta equivocado el siguiente argumento? Suponer que $\omega=F(x,y,z)$ y $z=g(x,y)$. Por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned}\frac{\partial\omega}{\partial x}&=\frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial\omega}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\\&=\frac{\partial\omega}{\partial x}+\frac{\partial\omega}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$0=\frac{\partial\omega}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$$

de modo que $\frac{\partial\omega}{\partial z}=0$ o $\frac{\partial z}{\partial x}=0$, lo cual es, en general absurdo.

(b) Se define $F(x,y)$ que

$$F(x,y) = F(x, g(x)k(y), h(x,y))$$

Encuentre una expresión en términos de las derivadas parciales de F, g, k y h para $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$

P4. ¿El capitán PF tiene dificultades cerca del lado soleado de Mercurio. La temperatura del casco de la nave, cuando él está en la posición (x,y,z) estará dada por $T(x,y,z) = e^{-(x^2+2y^2+3z^2)}$ donde x, y y z estará medidos en metros. Actualmente él está en $(1,1,1)$.

(a) ¿En qué dirección deberá avanzar para disminuir más rápido la temperatura?
(b) Si la nave viaja a e^8 metros por segundo, con qué rapidez decrecerá la temperatura en esa dirección.
(c) Desafortunadamente, el metal del casco se cuarterá si se enfria a una tasa mayor que $\sqrt{14}e^2$ grados por segundo. Describir el conjunto de las direcciones posibles en las que puede avanzar bajando la temperatura a una tasa no mayor que ésa.

P5. Encuentre el polinomio de Taylor de 2 de orden de:
(a) $F(x,y) = e^{(x-1)^2} cos(y), x_0 = 1, y_0 = 0$
(b) $F(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}, x_0 = y_0 = 0$

P6. Calcular la expansión de Taylor de primer y segundo orden de las siguientes funciones en los puntos señalados. Calcule para cada aproximación una vecindad en torno al punto tal que la aproximación tenga un error de a lo más 10^{-2}.
(a) $f(x,y,z) = (x^2 + 2xy + y^2)e^z$ en $\vec{x}_0 = \{(1,2,0),(3,2,5)\}$
(b) $f(x,y,z) = (x^3 + 3x^2y + y^3)e^{z^2}$ en $\vec{x}_0 = \{(0,0,0),(3,2,3)\}$
(c) $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = log(cos(x_1 + x_2 - x_3 - x_4))$ en $\vec{x}_0 = 0$.

P7. Si $F : I\!R^n \to I\!R$ es una función de clase C^3 que satisface:

$$HF(x) = 0 \quad \forall x = (x_1, ..., x_n) \in I\!R^n$$

demuestre que F es una función lineal.
Ind.: Recuerde la demostración del teorema de Taylor ($HF(x)$ es la matriz Hessiana de F).

P8. Suponga que $z = z(x,y)$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{2\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \text{ en } I\!R_+ \times I\!R_+$$

Considere el cambio de variables

$$u = x + y, v = \frac{y}{x}$$

y la nueva función $\omega = \omega(u, v)$ definida por:

$$z(x, y) = x\omega(x + y, \frac{y}{x})$$

escriba la ecuación diferencial ω.

P9. Sea $F : I\!R^n \to I\!R$ una función convexa tal que $F(0) = 0$. Sea $a \in I\!R^n, a \neq 0$. Demuestre que la función $g : (0, \infty) \to I\!R$ definida por $g(t) = \frac{F(at)}{t}$ es creciente

P10. Encuentre el plano tangente a

$$S = \{(x, y, z)/x^2 logy + z^2 logx = 0\}$$

en el punto $(1, 1, 3)$. Si $\sigma(t) = (e^{-t}, e^{9t}, 3e^{-t})$ muestre que $\sigma(t) \in S \quad \forall t$ y encuentre $\sigma'(0)$. Calcule la derivada direccional de $F(x, y, z) = 2x(y + z) - yz$ en la dirección $\sigma'(0)$.

P11. Considere la función $F : I\!R^2 \to I\!R$ definida por

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

i) Grafique los conjuntos de nivel $1, 0$ y -1.
ii) ¿Es F continua en $(0, 0)$?.
iii) Calcule $\frac{\partial F}{\partial x}$ y $\frac{\partial F}{\partial y}$ para todo $(x, y) \in I\!R^2$.
iv) ¿Es F diferenciable en $(0, 0)$?
v) ¿Es F diferenciable en $(x, y) \neq (0, 0)$?
v) ¿Existe $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(0, 0)$?

P12. La función $z(x, y)$ diferenciable y satisface la siguiente identidad:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \varphi(ax + by + cz) \quad \forall x, y$$

donde $\varphi : I\!R \to I\!R$ es una función diferenciable y $a, b, c \in I\!R$. Demuestre que

$$(cy - bz)\frac{\partial z}{\partial x} + (az - cx)\frac{\partial z}{\partial y} = bx - ay$$

P13. Sea $F : I\!R^2 \to I\!R$ definida por $F(x, y) = (y^2 + 1)senx$.

(a) Hallar el plano tangente al grafo de F en el punto $(0,0)$.
(b) Encontrar el plano tangente al grafo de F en un punto $(t,0)$ del eje x.
(c) Determinar el(los) puntos $(t,0)$ donde los planos tangentes en $(0,0)$ y $(t,0)$ forman un ángulo de $90°$.

Nota: El ángulo entre dos planos es el ángulo formado por sus vectores normales.

P14. Si $F : I\!R^n \to I\!R$ es diferenciable y para un cierto $k \in I\!N$ satisface $F(tx) = t^k F(x) \quad \forall x \in I\!R^n \quad \forall t \in I\!R$. Demuestre que

$$\nabla F(x) \cdot x = kF(x) \quad \forall x \in I\!R^n$$

P15. Sea

$$F(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2)}{(x^2+y^2)}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Si $(x,y) \neq (0,0)$, calcular $\frac{\partial F}{\partial x}$ y $\frac{\partial F}{\partial y}$.
(b) Mostrar que $\frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = 0 = \frac{\partial F}{\partial y}(0,0)$.
(c) Mostrar que $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$; $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$.
(d) ¿Qué sucedió? ¿Por qué no son iguales las parciales mixtas?.

P16. Sea $f : I\!R^2 \to I\!R$. Se define $g : I\!R^+ \times 0, 2\pi) \to I\!R$ por $g(r,\phi) = f(rcos\phi, rsen\phi)$. Demuestre que

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}g + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \phi^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$