

**Guía N° 2 Cálculo en Varias Variables MA22A**

**Prof: Pierre Guiraud**

Auxiliar: Raul Aliaga Diaz

Ayudantes: Dusan Juretic, Matias Reeves

*Jueves 28 de Abril del 2005*

**Problema 1** Suponga que  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , función dos veces diferenciable, satisface

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{Ecuación de Laplace})$$

Determine qué ecuación satisface

$$v(s, t) = u(st, \frac{1}{2}(s^2 - t^2))$$

**Problema 2** Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C^2(\mathbb{R})$ . Para cada  $x \in \mathbb{R}$  se define  $g_x(y) = f(x, y)$ . Supongamos que para cada  $x$  existe un único punto  $y$  tal que  $g'_x(y) = 0$ .

Si ese punto se denota por  $c(x)$  ( $g'_x(c(x)) = 0$ ), demuestre que:

a) Si  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \neq 0 \quad \forall (x, y) \Rightarrow c$  es diferenciable y

$$c'(x) = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, c(x))}{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, c(x))}$$

b) Si  $c'(x) = 0 \Rightarrow \exists \bar{y}$  tq  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, \bar{y}) = 0 \wedge \frac{\partial f}{\partial y}(x, \bar{y}) = 0$

**Problema 3** Sea  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de clase  $C^2$  tal que  $\phi(x, y) = (\phi_1(x, y), \phi_2(x, y))$  y

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x} = \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \quad \wedge \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial y} = -\frac{\partial \phi_2}{\partial x}$$

Sea  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^2$ . Se define  $f = h \circ \phi$ . Demuestre que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left[ \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right)^2 \right] \left[ \frac{\partial^2 h}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial v^2} \right]$$

**Problema 4** Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} xy^2 \sin(\frac{1}{xy}) & xy \neq 0 \\ 0 & xy = 0 \end{cases}$$

a) Calcule las derivadas parciales de  $f$  en todo punto  $(x, y)$ .

Indicación: considere los casos  $xy \neq 0$ ,  $xy = 0 \wedge x \neq 0$ ,  $xy = 0 \wedge y \neq 0$  y  $x = y = 0$ .

b) Si  $xy \neq 0$  ¿Es  $f$  diferenciable en  $(x, y)$ ?

c) ¿Es  $f$  diferenciable en  $(0, 0)$ ?

d) ¿Es  $\frac{\partial f}{\partial y}$  continua en  $(0, 0)$ ?

**Problema 5** Estudie la diferenciabilidad de

$$F(x, y) = \begin{cases} x^2 y \log(x^2 + y^2) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

**Problema 6** Una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  se llama una función par si  $f(x) = f(-x)$  para todo  $x$  en  $\mathbb{R}^n$ . Si  $f$  es diferenciable y par, hallar  $Df$  en el origen.

**Problema 7** Calcular una ecuación para el plano tangente a la gráfica de:

$$f(x, y) = \frac{e^x}{x^2 + y^2}$$

en  $x = 1, y = 2$ .

**Problema 8** a) Trazar las curvas de nivel de

$$f(x, y) = -x - 9y^2$$

para  $c = 0, -1, -10$

b) Sobre su trazo, dibujar  $\nabla f$  en  $(1, 1)$ . Explicar.

**Problema 9** Si  $u, v$  y  $w$  son las funciones de  $(x, y, z)$  definidas por:

$$u = e^x \cos(y) \quad v = e^x \sin(y) \quad w = x + y + z$$

Hallar el Jacobiano de  $(u, v, w)$  respecto a las coordenadas esféricas  $\rho, \theta, \varphi$ :

$$x = \rho \cos(\varphi) \cos(\theta) \quad y = \rho \sin(\varphi) \cos(\theta) \quad z = \rho \sin(\theta)$$

**Problema 10** Sea  $w = f(x, y, z)$  una función de tres variables independientes. Escriba la definición formal de la derivada parcial  $\frac{\partial f}{\partial y}$  en  $(x_0, y_0, z_0)$ . Use esta definición para encontrar  $\frac{\partial f}{\partial y}$  en  $(-1, 3, 0)$  para  $f(x, y, z) = -2xy^2 + yz^2$ .

**Problema 11** Encuentre la linealización de

$$f(x, y) = x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 + 3$$

en el punto  $(3, 2)$ .

**Problema 12** a) Demuestre que si sustituimos las coordenadas polares

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

en una función diferenciable  $\omega = f(x, y)$ , entonces

$$\frac{\partial \omega}{\partial r} = f_x \cos \theta + f_y \sin \theta \quad \text{y} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} = -f_x \sin \theta + f_y \cos \theta$$

b) Resuelva las condiciones en a) para expresar  $f_x$  y  $f_y$  en términos de  $\frac{\partial \omega}{\partial r}$  y  $\frac{\partial \omega}{\partial \theta}$ .

c) Demuestre que

$$f_x^2 + f_y^2 = \left( \frac{\partial \omega}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right)^2$$

**Problema 13** Suponiendo que las ecuaciones en a) y b) definen  $y$  como una función diferenciable de  $x$ , encuentre el valor de  $\frac{\partial y}{\partial x}$  en el punto  $P$ .

a)  $1 - x - y^2 - \sin(xy) = 0$ ,  $P = (0, 1)$

b)  $2xy + e^{x+y} - 2 = 0$ ,  $P = (0, \ln 2)$

**Problema 14** Encuentre la derivada de  $f(x, y, z) = xyz$  en la dirección del vector velocidad de la hélice

$$r(t) = (\cos 3t, \sin 3t, 3t)$$

en  $t = \frac{\pi}{3}$ .

**Problema 15** Cúal de los siguientes enunciados son verdaderos si  $f(x, y)$  es diferenciable en  $(x_0, y_0)$ ?

a) Si  $u$  es un vector unitario, la derivada de  $f$  en  $(x_0, y_0)$  en la dirección  $u$  es  $(f_x(x_0, y_0)\hat{i} + f_y(x_0, y_0)\hat{j}) \cdot u$

b) La derivada de  $f$  en  $(x_0, y_0)$  en la dirección  $u$  es un vector.

c) La derivada direccional de  $f$  en  $(x_0, y_0)$  tiene su valor máximo en la dirección de  $\nabla f$

d) En  $(x_0, y_0)$ , el vector  $\nabla f$  es normal a la curva  $f(x, y) = f(x_0, y_0)$ .

**Problema 16** Demuestre que la curva

$$r(t) = \left(\frac{t^3}{4} - 2, \frac{4}{t} - 3, \cos(t - 2)\right)$$

es tangente a la superficie

$$x^3 + y^3 + z^3 - xyz = 0$$

en  $(0, -1, 1)$ .

**Problema 17** *Gradiente en coordenadas esféricas.* Suponga que las coordenadas esféricas  $r, \theta, \phi$  se introducen en una función  $\omega = f(x, y, z)$  para dar una función  $\omega = R(r, \theta, \phi)$ . Demuestre que

$$\nabla \omega = \frac{\partial \omega}{\partial r} u_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} u_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \omega}{\partial \phi} u_\phi$$

donde

$$\begin{aligned} u_r &= (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \\ u_\theta &= (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta) \\ u_\phi &= (-\sin \phi, \cos \phi, 0) \end{aligned}$$

Sugerencia: Expresé el lado derecho de la ecuación en términos de  $i, j$  y  $k$  unitarios, use la regla de la cadena para expresar las componentes de  $i, j$  y  $k$  en coordenadas rectangulares.

**Problema 18** Considere las funciones

$$f(x, y) = (\tan(x + y), 1 + xy, e^{x^2+y}) \quad y \quad g(u, v, w) = \sin(uv + \pi w)$$

Sea  $h = g \circ f$ . Encuentre el plano tangente al grafo de  $h$  en el punto  $(0, 0, 0)$ .

**Problema 19** a) Sea  $g : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$  y  $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$  donde  $g(1, 1, 1) = (2, 3)$  y

$$Df(2, 3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad f \circ g(x, y, z) = \begin{bmatrix} xy^2z^2 \\ x^2y^2z \end{bmatrix}$$

Calcule:

$$\frac{\partial g_2}{\partial y}(1, 1, 1)$$

**Problema 20** Sea

$$S = \{x \in \mathbb{R}^2 / \|x\|_2 = 1\}$$

y  $g : S \mapsto \mathbb{R}$  función continua y tal que:

$$g(1, 0) = g(0, 1) = 0 \quad \wedge \quad \forall x \in S, g(-x) = -g(x)$$

Se define

$$f(x) = \begin{cases} \|x\|_2 g\left(\frac{x}{\|x\|_2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a) Dado  $a \in \mathbb{R}^2$ , demostrar que  $h(t) = f(at)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  es diferenciable.

**Problema 21** Definimos

$$g(x) = \begin{cases} \frac{(x^2-y)^2 y^2}{x^{7+\frac{1}{2}}} & \text{si } 0 < x, 0 < y < x^2 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Sea  $\gamma(t) = (t, \frac{1}{2}t^2)$ . ¿Es  $g \circ \gamma(t)$  diferenciable en  $t = 0$ ? A partir de la regla de la cadena ¿Que puede concluir de la diferenciabilidad de  $g$  en  $(0, 0)$ ?