

1. a) (2 ptos.) Considere el sistema de ecuaciones

$$xzt + xy - y^2t + 2 = 0$$

$$\cos(xt) + zy - 2 = 0.$$

i) Muestre que existe φ definida en una vecindad de $(0, 1)$ de clase C^1 tal que las soluciones del sistema en torno del punto $(x_0, y_0, z_0, t_0) = (0, 1, 1, 2)$ tienen la forma $(z, t) = \varphi(x, y)$.

ii) ¿Es φ invertible en torno de $(0, 1)$?

- b) (4 ptos.) Sea
- $u(r, s)$
- una función de clase
- C^2
- que satisface

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}(r, s) + \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}(r, s) = \frac{1}{r^2 + s^2}.$$

Considere el cambio de variables

$$r = e^x \cos(y), \quad s = e^x \sin(y),$$

y defina $v(x, y) = u(e^x \cos(y), e^x \sin(y))$. Calcule la siguiente expresión $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$.

2. a) (2 ptos.) Responda verdadero o falso

i) La continuidad de una función en un punto implica la continuidad de dicha función en una vecindad.

ii) $\{A \in \mathcal{M}_{nn} : \det(A) > 0\}$ es un conjunto abierto.

iii) $\{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot a = 1\}$ es un conjunto cerrado.

iv) Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es C^1 convexa y x_0 es un punto crítico de f , entonces x_0 es máximo de f .

v) Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es C^2 y x_0 es máximo local de f entonces $Hf(x_0)$ es definida negativa.

vi) Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es C^2 y x_0 es mínimo local de f entonces $Hf(x_0)$ es semidefinida positiva.

- b) (2 ptos.) Sea
- $Y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- una función
- C^2
- tal que

$$Y(t) = at + \int_0^t Y(\tau) \sin(t - \tau) d\tau \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

donde a es una constante. Calcule $Y''(t)$ y deduzca una fórmula explícita para $Y(t)$.

- c) (2 ptos.) Sea
- D
- la región en el primer cuadrante, encerrada por las circunferencias
- $x^2 + y^2 - 2x = 0$
- y
- $x^2 + y^2 = 4$
- . Calcule

$$\iint_D x(x^2 + y^2) dx dy.$$

3. a) (3 ptos.) Considere el dominio
- $\Omega \subset \mathbb{R}^3$
- determinado por
- $x^2 + y^2 \leq 9$
- ,
- $z \geq 0$
- ,
- $z \leq 2 + (y - 3)^2$
- ,
- $z \leq 2 + (y + 3)^2$
- . Encuentre el volumen de
- Ω
- .

- b) (3 ptos.) Sean
- $p, q > 0$
- . Encontrar el mínimo de la función
- $\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$
- sujeto a
- $x > 0, y > 0, xy = 1$
- . Luego usar este resultado para deducir la siguiente desigualdad cuando
- $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
- y
- $x > 0, y > 0$
- ,

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

TIEMPO: 3.5 HORAS