

**CURSO MA 22 CALCULO EN VARIAS VARIABLES.****EXAMEN 2005-01**

martes 5 de julio de 2005

**Problema 1.-**

Parte a) La función  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  está definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \log(x^2 + y^2) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- i) Calcular las derivadas parciales de la función.
- ii) Si las derivadas parciales existen, determinar si son continuas.

Parte b)

- i) Dada la función  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  por su valor  $f(x, y) = \frac{y-x}{y+x}$ , calcular el valor de la derivada direccional en el punto  $(3, 5)$  en la dirección del vector  $\vec{u} = (3, 4)$
- ii) En ese mismo punto, determinar en qué dirección se produce el máximo valor de la derivada direccional y cuál es.

**Problema 2.-**

Parte a) Sea  $f(x, t)$  una función  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , de clase  $C^2$ , que satisface la ecuación diferencial

$$(A) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\omega^2}{k^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \text{ siendo } \omega, k \text{ constantes positivas.}$$

Mediante el cambio de variable  $u = kx - \omega t$ ;  $v = kx + \omega t$  la función  $f(x, t)$  se transforma en  $g(u, v)$ .

- i) Determinar la ecuación diferencial equivalente a (A) que satisface  $g(u, v)$
- ii) Demostrar que existen dos funciones  $\phi, \psi$  solamente de  $u$  y  $v$ , respectivamente, que satisfacen la ecuación  $f(x, t) = \phi(kx - \omega t) + \psi(kx + \omega t)$

Indicación: Como  $f(x, t) = g(u, v)$  entonces 
$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} = -\omega \frac{\partial g}{\partial u} + \omega \frac{\partial g}{\partial v} \text{ etc., etc..}$$

Parte b) El paraboloide  $2z = 16 - x^2 - y^2$  el plano  $x + y = 4$  se cortan según una curva  $C$ . Determinar los puntos de  $C$ , en el primer octante, que se encuentran más cercanos y más distantes del origen. Calcular el valor de esas distancias máxima y mínima.

**Problema 3.-**

- i) Calcular la doble integral  $\iint_R \frac{(x-y+1)dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy + 2x + 2y + 1}}$  sobre la región triangular  $R$  formada por los puntos  $A(0, 0)$ ,  $B(1, 0)$ ,  $C(2, 2)$ .

Indicación: Utilizar el cambio de variable  $x = uv + u$   
 $y = uv + v$

- ii) Determinar que el área de aquella parte de la superficie  $az = xy$  que se encuentra en el interior del cilindro  $4(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$  es  $(20 - 3\pi)a^2/9$ .

Indicación: usar coordenadas polares.

- iii) Sea  $D$  una región de  $\mathbb{R}^2$ , limitada por una curva  $C$ , en la cual se cumplen las condiciones del Teorema de Green.

Si  $f$  es una función armónica en  $D$ , es decir si  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

demostrar que  $\oint_C \left( \frac{\partial f}{\partial y} dx - \frac{\partial f}{\partial x} dy \right) = 0$