

Roberto Cortez Milán

P1

Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \log |x-y| & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

- (i) Justifique que el dominio de f es \mathbb{R}^2 y demuestre que el conjunto donde f es continua es

$$C = (\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : x = y\})$$

- (ii) Calcule las derivadas parciales de f (donde existan) y demuestre que f es diferenciable en C .

Solución:

- (i) Cuando $x \neq y$ se tiene $|x-y| > 0$, así que $\log |x-y|$ existe y f está bien definida. Además, $\log(\cdot)$ es continua, $|\cdot|$ también, xy , $x-y$ también son funciones continuas. Por álgebra de funciones continuas, f es continua al menos en el conjunto

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : x = y\}$$

Veamos que f no es continua en $(0,0)$: consideremos $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{n} - e^{-n^3}$. Se tiene $(x_n, y_n) \xrightarrow{n} (0,0)$ con $x_n \neq y_n$, luego

$$\begin{aligned} f(x_n, y_n) &= \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} - e^{-n^3} \right) \log e^{-n^3} \\ &= \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} - e^{-n^3} \right) (-n^3) \\ &= -n^3 \left[\frac{1}{n^2} - \frac{e^{-n^3}}{n} \right] \\ &= -n + n^2 e^{-n^3} \\ &\xrightarrow{n} -\infty \end{aligned}$$

Hemos encontrado una sucesión (x_n, y_n) que converge a $(0,0)$, pero tal que $f(x_n, y_n) \rightarrow -\infty \neq 0$, luego f es discontinua en $(0,0)$. Veamos que f no es continua en $\{(x,y): x=y, x,y \neq 0\}$. Sea $x_0 = y_0 \neq 0$. Tomemos x_n tendiendo a x_0 , pongamos $y_n = \frac{n}{n+1} x_n$. Se tiene $(x_n, y_n) \xrightarrow{n} (x_0, y_0)$, con $x_n \neq y_n$.

luego

$$\begin{aligned} x_n y_n &\xrightarrow{n} x_0 y_0 = x_0^2 > 0 \\ |x_n - y_n| &\xrightarrow{n} |x_0 - y_0| = 0 \Rightarrow \log |x_n - y_n| \xrightarrow{n} -\infty \end{aligned}$$

Por lo tanto $f(x_n, y_n) \xrightarrow{n} -\infty \neq 0 = f(x_0, y_0)$. Así que f no es continua en (x_0, y_0) . Luego, el conjunto donde f es continua es

$$(\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y): x=y\})$$

(ii) Sabemos que f es derivable en $\{(x,y): x \neq y\}$.
Calculemos las derivadas allí: (2)

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x} (xy \log |x-y|) \\ &= y \log |x-y| + xy \frac{\text{sgn}(x-y)}{|x-y|} \quad \forall x \neq y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y} (xy \log |x-y|) \\ &= x \log |x-y| - xy \frac{\text{sgn}(x-y)}{|x-y|} \quad \forall x \neq y\end{aligned}$$

Como f no es continua en $\{(x,y): x=y\}$
no puede ser derivable allí, así que el conjunto
donde f es derivable es el mismo que antes,
es decir, C . □

P2

Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2
que satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t) = \frac{w^2}{b^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) \quad w, b > 0$$

Justifique que la función definida por

$$g(u,v) = f\left(\frac{v+u}{2b}, \frac{v-u}{2w}\right)$$

es de clase C^2 y pruebe que

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0$$

Solución: la función $G(u,v) = (\frac{v+u}{2k}, \frac{v-u}{2w})$ es lineal, así que es \mathcal{C}^2 . Como g se puede escribir como $g = f \circ G$ y como f es \mathcal{C}^2 , por álgebra de funciones \mathcal{C}^2 se tiene que g es \mathcal{C}^2 . Derivémosla:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) &= \frac{\partial}{\partial u} \left[f\left(\frac{v+u}{2k}, \frac{v-u}{2w}\right) \right] \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{v+u}{2k}, \frac{v-u}{2w}\right) \cdot \frac{1}{2k} - \frac{\partial f}{\partial t}\left(\frac{v+u}{2k}, \frac{v-u}{2w}\right) \frac{1}{2w}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial u}(u,v) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{v+u}{2k}, \frac{v-u}{2w}\right) \cdot \frac{1}{4k^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}\left(\frac{v+u}{2k}, \frac{v-u}{2w}\right) \frac{1}{2k} \cdot \frac{1}{2w} \\ &\quad - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}\left(\frac{v+u}{2k}, \frac{v-u}{2w}\right) \frac{1}{2w} \cdot \frac{1}{2k} - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\left(\frac{v+u}{2k}, \frac{v-u}{2w}\right) \frac{1}{4w^2}\end{aligned}$$

Como f es \mathcal{C}^2 , por tco Schwarz las derivadas cruzadas son iguales.

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial u}(u,v) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{v+u}{2k}, \frac{v-u}{2w}\right) \cdot \frac{1}{4k^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\left(\frac{v+u}{2k}, \frac{v-u}{2w}\right) \frac{1}{4w^2}$$

↑
iguales por hipótesis

= 0

□

P3

Calcular la expansión de Taylor de segundo orden de

$$f(x,y,z) = (x^2 + 2xy + y^2) e^z$$

en torno a $(x_0, y_0, z_0) = (1, 2, 0)$. Encuentre una cota genérica para el error.

Solución: recordemos qué forma tiene la expansión de Taylor: (3)

$$f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = f(\vec{x}_0) + \nabla f(\vec{x}_0) \cdot \vec{h} + \frac{1}{2} \vec{h}^t H_f(\vec{x}_0) \vec{h} + R(\vec{x}_0, \vec{h})$$

$$\text{donde } R(\vec{x}_0, \vec{h}) = \frac{1}{3!} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} (\vec{x}_0 + t_{ijk} \vec{h}) h_i h_j h_k$$

con $t_{ijk} \in [0, 1]$.

Calculamos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = (2x + 2y) e^z$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = (2x + 2y) e^z$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = (x^2 + 2xy + y^2) e^z \quad (= f(x, y, z))$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 e^z$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = (2x + 2y) e^z$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = (x^2 + 2xy + y^2) e^z \quad (= f(x, y, z))$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = 0 \quad (8 \text{ derivadas})$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial z} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial z} = 2 e^z \quad (12 \text{ derivadas})$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z^2} = (2x + 2y) e^z \quad (6 \text{ derivadas})$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial z^3} = (x^2 + 2xy + y^2) e^z \quad (= f(x, y, z)) \quad (1 \text{ der.})$$

$$\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) = (1, 2, 0) \text{ . Luego:}$$

$$f(\vec{x}_0) = 9$$

$$\nabla f(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$H_f(\vec{x}_0) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 6 \\ 6 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\left| \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} (\vec{x}_0 + t_{ijk} \vec{h}) \right| = 0 \quad \text{para 8 derivadas (sin } \frac{\partial}{\partial z})$$

$$\left| \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} (\vec{x}_0 + t_{ijk} \vec{h}) \right| = 2e^{0+t_{ijk}h_3} \quad \text{para 12 derivadas (con una } \frac{\partial}{\partial z})$$

$$\leq 2e^{\|h_3\|} = \alpha_1$$

$$\left| \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} (\vec{x}_0 + t_{ijk} \vec{h}) \right| = \left| (2(1+t_{ijk}h_1) + 2(2+t_{ijk}h_2)) \right| e^{t_{ijk}h_3}$$

$$= \left| 6 + 2t_{ijk}(h_1 + h_2) \right| e^{t_{ijk}h_3}$$

$$\leq (6 + 2(\|h_1\| + \|h_2\|)) e^{\|h_3\|} = \alpha_2$$

para 6 derivadas
(con $\frac{\partial^2}{\partial z^2}$)

$$\left| \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} (\vec{x}_0 + t_{ijk} \vec{h}) \right| = (1+t_{ijk}h_1 + 2+t_{ijk}h_2)^2 e^{t_{ijk}h_3}$$

$$= (3 + t_{ijk}(h_1 + h_2))^2 e^{t_{ijk}h_3}$$

$$\leq (9 + 2(\|h_1\| + \|h_2\|) + \|h_1\|^2 + 2\|h_1\|\|h_2\| + \|h_2\|^2) e^{\|h_3\|}$$

$$= \alpha_3 \quad \text{para 1 derivada (con } \frac{\partial^3}{\partial z^3})$$

Wego, podemos acotar el resto como sigue.

(4)

$$|R(\vec{x}_0, \vec{h})| \leq \frac{1}{3!} \left[\alpha_1 |h_3| (3|h_1|^2 + 3|h_2|^2 + 6|h_1||h_2|) \right. \\ \left. + \alpha_2 |h_3|^2 (3|h_1| + 3|h_2|) + \alpha_3 |h_3|^3 \right]$$

La expansión de esto no la haremos. $\frac{11}{12}$

luego, el desarrollo de Taylor de f en torno a $(1, 2, 0)$ es

$$f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = 9 + 6h_1 + 6h_2 + 9h_3 + \frac{1}{2} \vec{h} \begin{pmatrix} 2h_1 + 2h_2 + 6h_3 \\ 2h_1 + 2h_2 + 6h_3 \\ 6h_1 + 6h_2 + 9h_3 \end{pmatrix}$$

$$+ R(\vec{x}_0, \vec{h})$$

$$= 9 + 6h_1 + 6h_2 + 9h_3 + h_1^2 + h_1h_2 + 3h_1h_3 \\ + h_1h_2 + h_2^2 + 3h_2h_3 \\ + 3h_1h_3 + 3h_2h_3 + \frac{9}{2}h_3^2 \\ + R(\vec{x}_0, \vec{h})$$

$$= 9 + 6h_1 + 6h_2 + 9h_3 + h_1^2 + h_2^2 + \frac{9}{2}h_3^2 + 2h_1h_2 \\ + 6h_1h_3 + 6h_2h_3 \\ + R(\vec{x}_0, \vec{h})$$

□