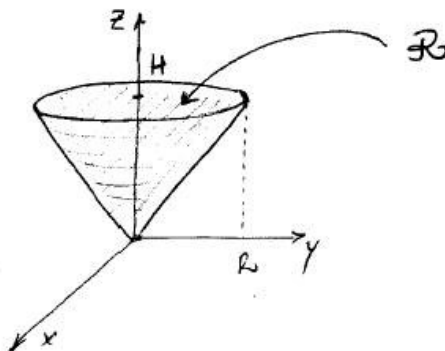


(P1) Calcule

$$I = \iiint_R \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy dz$$



Sol.

Podemos intentar integrar la fn. pedida mediante el uso de coordenadas cartesianas, pero indudablemente la simetría del dominio de integración permite simplificar los cálculos mediante el uso de otro tipo de coordenadas: cilíndricas.

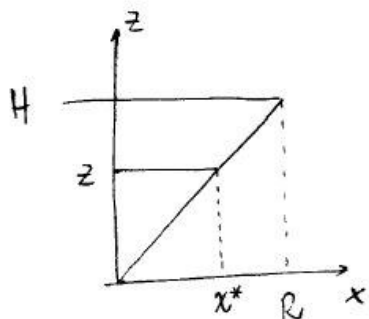
Para ver la diferencia, veamos que pasa al tratar de calcular con cartesianas y luego con cilíndricas.

Lo primero es parametrizar la región de integración:

• Cartesianas:

Probemos dejando "libre" la variable z , para luego hacer $x = x(z)$ y posteriormente $y = y(x, z)$.

Veamos la figura de "lado":



Por sea de Tales.

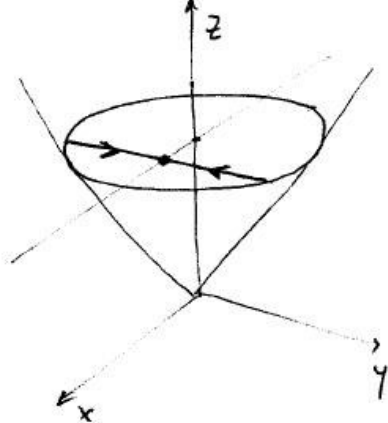
$$\frac{H}{R} = \frac{z}{x^*}$$

Es fácil ver que dado un " z ", " x " podrá moverse entre $-x^*$ y x^* .

Luego:

$$z \in [0, H]$$

$$x \in \left[-\frac{zR}{H}, \frac{zR}{H} \right]$$



Luego, dado " x " y " z ", podemos ver que " y " podría moverse entre los extremos del círculo que corresponda. Esto es:

$$y \in \left[-\sqrt{\left(\frac{ze}{h}\right)^2 - x^2}, \sqrt{\left(\frac{ze}{h}\right)^2 - x^2} \right]$$

Así, determinamos que:

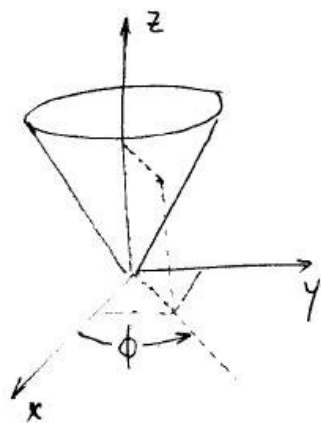
$$(x, y, z) \in \mathcal{R}_0 \Leftrightarrow \begin{aligned} z &\in [0, H] \\ x &\in \left[-\frac{ze}{h}, \frac{ze}{h} \right] \\ y &\in \left[-\sqrt{\left(\frac{ze}{h}\right)^2 - x^2}, \sqrt{\left(\frac{ze}{h}\right)^2 - x^2} \right] \end{aligned}$$

Con lo cual:

$$I = \int_0^H \int_{-\frac{ze}{h}}^{\frac{ze}{h}} \int_{-\sqrt{\left(\frac{ze}{h}\right)^2 - x^2}}^{\sqrt{\left(\frac{ze}{h}\right)^2 - x^2}} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy dx dz \quad (*)$$

Se puede ver que la integral resultante puede resultar bastante complicada.

Veamos ahora que pasa al utilizar coords. cilíndricas:



Es fácil ver que podemos parametrizar \mathcal{R}_0 como sigue:

$$\begin{aligned} z &\in [0, H] \\ \phi &\in [0, 2\pi] \\ \rho &\in \left[0, \frac{ze}{h} \right] \end{aligned}$$

Ya partimos bien: la parametrización resultó ser mucho más sencilla. Así también lo será la integral:

Se usó en cátedra que:

$$|J_{\text{cilíndricos}}| = \rho,$$

y usando teo. de cambio de variable:

$$\int_{f(\Omega)} g(u) du = \int_{\Omega} g(f(w)) |J_f(w)| dw$$

Luego, debemos calcular:

$$I = \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{2R}{H}} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \rho d\phi dz$$

Pero $x = \rho \cos \phi$ e $y = \rho \sin \phi$. Entonces:

$$I = \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{2R}{H}} \frac{\rho^2 \cos^2 \phi}{\rho} \rho d\phi dz$$

$$= \int_0^H \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{3} \rho^3 \Big|_0^{\frac{2R}{H}} d\phi dz \cos^2 \phi \right)$$

$$= \int_0^H \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} \frac{2^3 R^3}{H^3} \cos^2 \phi d\phi dz$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 \phi d\phi \right) \left(\int_0^H \frac{1}{3} \frac{2^3 R^3}{H^3} dz \right)$$

$$\text{, pero } \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi d\phi = \int_0^{2\pi} \sin^2 \phi d\phi = \pi$$

$$\Rightarrow I = \pi \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \frac{H^4 R^3}{H^3}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{12} R^3 H \pi //$$

ppto. Verificar que la expresión en (*) coincide con este valor. (Estoy seguro que están muy ansiosos por hacer esa maravillosa integral \rightarrow)

(P2) Calcule la masa del cuerpo definido por:

$$\Omega = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \geq 1, z \geq 0 \}$$

cuya densidad está dada por:

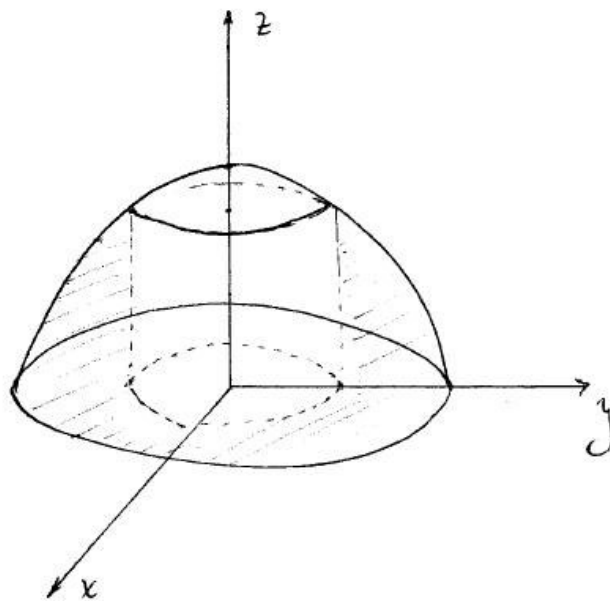
$$\rho(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + z^2}$$

Sol.

Podemos calcular la masa de un cuerpo:

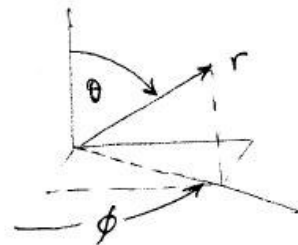
$$M = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

Siempre es bueno hacer un pequeño dibujo de la región de integración. Al pensarlo un momento, se puede ver que la figura asociada será:



Por simetría, usaremos coords. esféricas, las cuales son:

$$(C.V) \quad \begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$



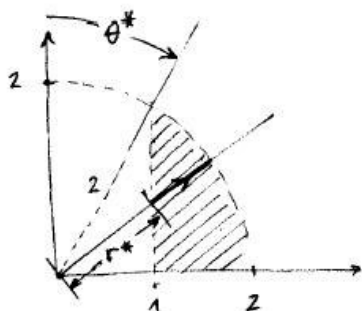
Calculen $|J_{\text{esf}}|$ por esta vez:

$$\begin{aligned} |J_{\text{esf}}| &= \det \begin{bmatrix} \cos\phi \operatorname{sen}\theta & r \cos\theta \cos\phi & -r \operatorname{sen}\theta \cos\phi \\ \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta & r \cos\theta \operatorname{sen}\phi & r \operatorname{sen}\theta \cos\phi \\ \cos\theta & -r \operatorname{sen}\theta & 0 \end{bmatrix} \\ &= \cos\theta (r^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta \cos^2\phi + r^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta \operatorname{sen}^2\phi) \\ &\quad + r \operatorname{sen}\theta (r \cos^2\phi \operatorname{sen}^2\theta + r^2 \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}^2\phi) \\ &= \cos\theta r^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta + \operatorname{sen}\theta r^2 \operatorname{sen}^2\theta \\ &= r^2 \operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

Luego: (más vale recordarlo)

$$|J_{\text{esf}}| = r^2 \operatorname{sen}\theta$$

Ahora, parametrizamos dominio de integración: Usemos vista lateral:



$$\phi \in [0, 2\pi] \quad (\text{por simetría cilíndrica})$$

Es fácil notar que $\theta^* = \pi/6$
(semi-triángulo equilátero)

Luego:

$$\theta \in [\pi/6, \pi/2]$$

Por otro lado: $r^* \operatorname{sen}\theta = 1 \Rightarrow r^* = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$

Entonces: $r \in \left[\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}, 2 \right]$

Calculamos entonces la masa del cuerpo, como sigue:

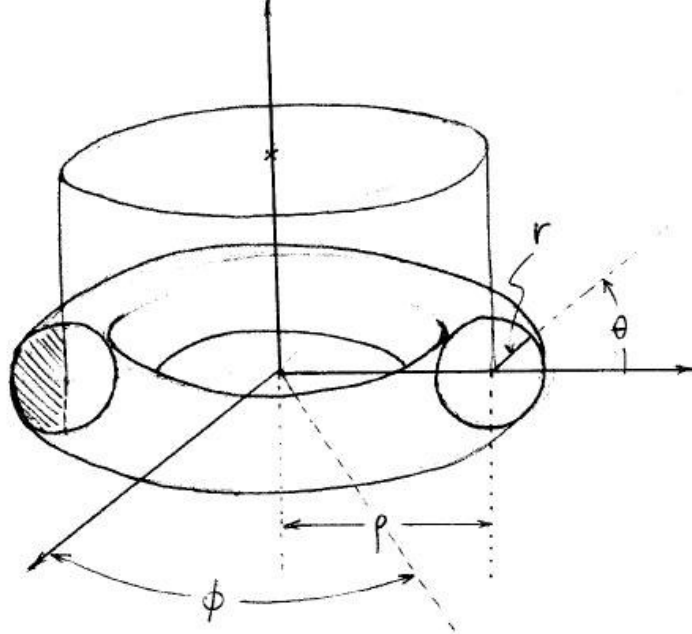
$$M = \int_0^{2\pi} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_{\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}}^2 \frac{r^2 \cos^2\phi \operatorname{sen}^2\theta + r^2 \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}^2\phi}{r^2} r^2 \operatorname{sen}\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow V &= \int_0^{2\pi} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_{\frac{1}{\sin\theta}}^2 r^2 \sin^3\theta \, dr \, d\theta \, d\phi \\
&= \left(\int_0^{2\pi} d\phi \right) \left(\int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_{\frac{1}{\sin\theta}}^2 r^2 \sin^3\theta \, dr \, d\theta \right) \\
&= 2\pi \left(\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1}{3} \left(8 - \frac{1}{\sin^3\theta} \right) \sin^3\theta \, d\theta \right) \\
&= \frac{2\pi}{3} \left(8 \int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin^3\theta \, d\theta - \int_{\pi/6}^{\pi/2} d\theta \right) \\
&= \frac{2\pi}{3} \left(8 \left[-\frac{1}{3} \sin^2\theta \cos\theta - \frac{2}{3} \cos\theta \right]_{\pi/6}^{\pi/2} - \left(\pi/2 - \pi/6 \right) \right) \\
&= \frac{2\pi}{3} \left(8 \left[\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right] - \frac{\pi}{3} \right) \\
&= \frac{2\pi}{3} \left(\frac{8\sqrt{3}}{3 \cdot 2} \left(\frac{1}{16} + 2 \right) + \pi/3 \right) \\
&= \frac{8\pi}{3\sqrt{3}} \left(\frac{33}{16} \right) + \frac{2\pi^2}{9} \\
&= \frac{11\pi}{2\sqrt{3}} + \frac{2\pi^2}{9}
\end{aligned}$$

(P3) Sea el toro dado por

$$\begin{aligned}
x &= (p + r \cos\theta) \cos\phi & r &\in [0, a] \\
y &= (p + r \cos\theta) \sin\phi & \phi &\in [0, 2\pi] \\
z &= r \sin\theta & \theta &\in [0, 2\pi]
\end{aligned}$$

El toro es cortado por un cilindro de radio p paralelo al eje z . Calcule el volumen de la porción externa del toro.



Haciendo uso del cambio de variables propuesto, podemos parametrizar el volumen como:

$$r \in [0, a]$$

$$\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$$

$$\phi \in [0, 2\pi]$$

Luego, debemos calcular la integral:

$$V = \int_0^a \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} 1 \cdot |J_{\text{toroids}}| d\phi d\theta dr$$

$$|J_{\text{toroids}}| = \begin{vmatrix} \cos\theta \cos\phi & -r \sin\theta \cos\phi & -(p+r\cos\theta) \sin\phi \\ \cos\theta \sin\phi & -r \sin\theta \sin\phi & (p+r\cos\theta) \cos\phi \\ \sin\theta & r \cos\theta & 0 \end{vmatrix} = r(p+r\cos\theta)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow V &= \int_0^a \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} r(p+r\cos\theta) d\phi d\theta dr \\ &= p \int_0^a \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} r d\phi d\theta dr + \int_0^a \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} r^2 \cos\theta d\phi d\theta dr \\ &= \pi a \left(\pi a p - \frac{4}{3} a^2 \right) \end{aligned}$$