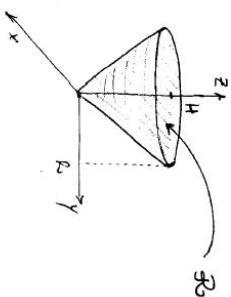


## P2) Cálculo

$$I = \iiint_R \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy dz$$



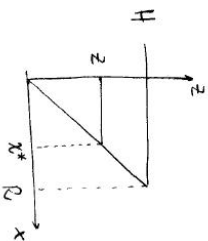
Sol.

Podemos intentar integrar la fn. pedida mediante el uso de coordenadas cartesianas, pero indudablemente la simetría del dominio de integración permite simplificar los cálculos mediante el uso de otro tipo de coordenadas: cilíndricas.

Para ver la diferencia, vamos a pasar al dato de calcular con cartesianas y luego con cilíndricas. Lo primero es parametrizar la región de integración:

• Cartesianas:

Podríamos eligiendo "libre" la variable  $z$ , para luego hacer  $x = x(z)$  parametrizando  $y = y(x, z)$ .  
Vemos la figura de "lado":



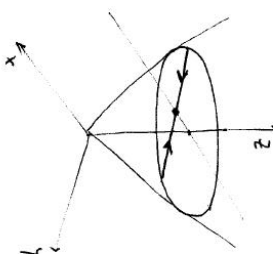
Por vía de Tallo.

$$\frac{H}{R} = \frac{z}{x^*}$$

Es fácil ver que dado un " $z$ ", " $x$ " podrá moverse entre  $-x^*$  y  $x^*$ .

Luego:

$$z \in [0, H] \\ x \in \left[-\frac{zR}{H}, \frac{zR}{H}\right]$$



Luego, dado " $x$ " y " $z$ ", podemos ver que " $y$ " podrá moverse entre los extremos del círculo que corresponde. Esto es:

$$y \in \left[-\sqrt{\left(\frac{zR}{H}\right)^2 - x^2}, \sqrt{\left(\frac{zR}{H}\right)^2 - x^2}\right]$$

Así, determinamos que:

$$(x, y, z) \in R \iff \begin{aligned} z &\in [0, H] \\ x &\in \left[-\frac{zR}{H}, \frac{zR}{H}\right] \\ y &\in \left[-\sqrt{\left(\frac{zR}{H}\right)^2 - x^2}, \sqrt{\left(\frac{zR}{H}\right)^2 - x^2}\right] \end{aligned}$$

Con lo cual:

$$I = \int_0^H \int_{-\frac{zR}{H}}^{\frac{zR}{H}} \int_{-\sqrt{\left(\frac{zR}{H}\right)^2 - x^2}}^{\sqrt{\left(\frac{zR}{H}\right)^2 - x^2}} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} dy dx dz \quad (*)$$

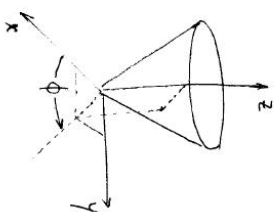
Se puede ver que la integral resultante puede resolverse bastante complicada.

Vemos ahora que pasa al utilizar coord. cilíndricas:

Es fácil ver que podemos parametrizar  $R$  como sigue:

$$\begin{aligned} z &\in [0, H] \\ \phi &\in [0, 2\pi] \\ \rho &\in \left[0, \frac{zR}{H}\right] \end{aligned}$$

Ya podemos ver que la parametrización resultó ser mucho más sencilla. Así también lo será la integral:



Se usó en cálculo que:

$$|\nabla \text{cilíndrico}| = \rho$$

usando teo. de cambio de variable:

$$\int_{\mathbb{R}^3} g(u) du = \int_{\Omega} |g(u)| |\nabla u(u)| du$$

luego, debemos calcular:

$$I = \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_{\frac{H}{4}}^{\frac{3H}{4}} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \rho d\phi dz$$

Pero  $x = \rho \cos \phi$  e  $y = \rho \sin \phi$ . Entonces:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_{\frac{H}{4}}^{\frac{3H}{4}} \frac{\rho^2 \cos^2 \phi}{\rho} \rho d\phi dz \\ &= \int_0^H \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{3} \rho^3 \right)_{\frac{H}{4}}^{\frac{3H}{4}} d\phi dz \cos^2 \phi \\ &= \int_0^H \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} \frac{2^3 \rho^3}{4^3} \cos^2 \phi d\phi dz \\ &= \left( \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi d\phi \right) \left( \int_0^H \frac{1}{3} \frac{2^3 \rho^3}{4^3} dz \right) \end{aligned}$$

$$\text{, pero } \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi d\phi = \int_0^{2\pi} \sin^2 \phi d\phi = \pi$$

$$\Rightarrow I = \pi \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \frac{4^3 \rho^3}{4^3}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{12} \rho^3 4\pi$$

prp. Verifican que la expresión en (\*) coincide con este valor. (Estoy seguro que están muy adivinados por haber traído maravillosa integral  $\rightarrow$ )

(12) Calcular la masa del cuerpo definido por:

$$M = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 4, x^2+y^2 \geq 1, z \geq 0 \}$$

cuya densidad está dada por:

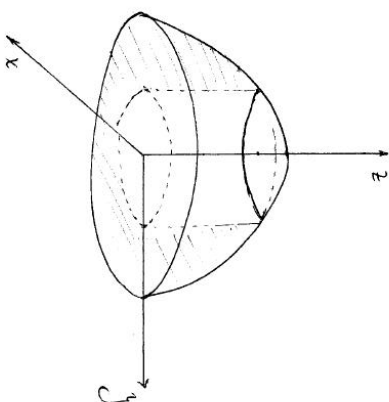
$$\rho(x,y,z) = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}$$

Sol.

Podemos calcular la masa de un cuerpo:

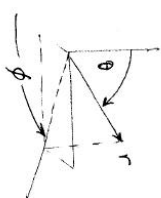
$$M = \iiint_M \rho(x,y,z) dx dy dz$$

Siempre es bueno hacer un pequeño dibujo de la región de integración. Al pensarlo en momento, se puede ver que la figura asociada es:



Por simetría, usamos coordenadas esféricas, las cuales son:

$$(C.N) \begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$



Calculamos  $|J_{\text{ext}}|$  por cada  $rz$ :

$$|J_{\text{ext}}| = \det \begin{bmatrix} \cos \phi \sin \theta & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \cos \phi \\ \sin \phi \sin \theta & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \cos \theta (r^2 \sin \theta \cos \theta \cos^2 \phi + r^2 \sin \theta \cos \theta \sin^2 \phi) + r \sin \theta (r \cos^2 \phi \sin^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi)$$

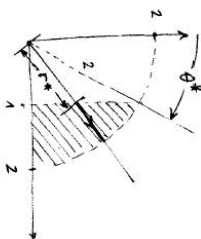
$$= \cos \theta r^2 \sin \theta \cos \theta + \sin \theta r^2 \sin^2 \theta$$

$$= r^2 \sin \theta$$

Entonces: (más vale recordarlo)

$$|J_{\text{ext}}| = r^2 \sin \theta$$

Ahora, para muchos juegos dominio de integración: Usamos vista lateral.



$\phi \in [0, 2\pi]$  (por simetría en  $\phi$ )

Lo fácil notar que  $\theta^* = \pi/6$  (semi-ángulo en lateral)

Entonces:

$$\theta \in [\pi/6, \pi/2]$$

Por otro lado:  $r^* \sin \theta = 1 \Rightarrow r^* = \frac{1}{\sin \theta}$

Entonces:  $r \in [\frac{1}{\sin \theta}, 2]$

Calculamos entonces la masa del cuerpo, como sigue.

$$M = \int_0^{2\pi} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_{\frac{1}{\sin \theta}}^2 \frac{r^2 \cos^2 \phi \sin^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi}{r^2} r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

$$\Rightarrow M = \int_0^{2\pi} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_{\frac{1}{\sin \theta}}^2 r^2 \sin^3 \theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

$$= \left( \int_0^{2\pi} d\phi \right) \left( \int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_{\frac{1}{\sin \theta}}^2 r^2 \sin^3 \theta \, dr \, d\theta \right)$$

$$= 2\pi \left( \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1}{3} \left( 8 - \frac{1}{\sin^3 \theta} \right) \sin^3 \theta \, d\theta \right)$$

$$= \frac{2\pi}{3} \left( 8 \int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin^3 \theta \, d\theta - \int_{\pi/6}^{\pi/2} d\theta \right)$$

$$= \frac{2\pi}{3} \left( 8 \left[ -\frac{1}{3} \sin^2 x \cos x - \frac{2}{3} \cos x \right]_{\pi/6}^{\pi/2} - \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right) \right)$$

$$= \frac{2\pi}{3} \left( \frac{8\sqrt{3}}{3 \cdot 2} \left( \frac{1}{16} + 2 \right) + \frac{\pi}{3} \right)$$

$$= \frac{8\pi}{3\sqrt{3}} \left( \frac{33}{16} \right) + \frac{2\pi^2}{9}$$

$$= \frac{44\pi}{2\sqrt{3}} + \frac{2\pi^2}{9}$$

**P3** Sea el loro dado por

$$x = (p + r \cos \theta) \cos \phi$$

$$y = (p + r \cos \theta) \sin \phi$$

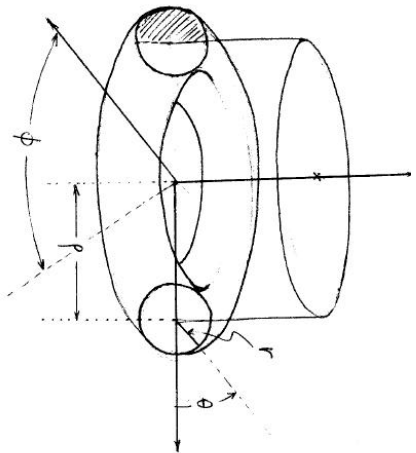
$$z = r \sin \theta$$

$$r \in [0, 4]$$

$$\phi \in [0, 2\pi]$$

$$\theta \in [0, \pi]$$

El loro es cortado por un cilindro de radio  $p$  paralelo al eje  $z$ . Calcule el volumen de la porción externa del loro.



Haciendo uso del cambio de variable propuesto,  
podemos parametrizar el volumen como:

$$\begin{aligned} r &\in [0, a] \\ \theta &\in [-\pi/2, \pi/2] \\ \phi &\in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

Entonces, obtenemos calcular la integral:

$$V = \int_0^a \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} 1 \cdot |J_{\text{transform}}| \, d\phi \, d\theta \, dr$$

$$|J_{\text{transform}}| = \begin{bmatrix} a \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \cos \phi & -(p+r \cos \theta) \sin \phi \\ a \sin \theta \cos \phi & -r \cos \theta \cos \phi & (p+r \cos \theta) \cos \phi \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \end{bmatrix} = r(p+r \cos \theta)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow V &= \int_0^a \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} r(p+r \cos \theta) \, d\phi \, d\theta \, dr \\ &= p \int_0^a \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} r \, d\phi \, d\theta \, dr + \int_0^a \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} r^2 \cos \theta \, d\phi \, d\theta \, dr \\ &= \pi a \left( \pi a p - \frac{4}{3} a^2 \right) \end{aligned}$$