

P1 Resolver el problema de minimización, y verificar usando criterio de 2º orden:

$$\begin{aligned} \min \quad & x+y+z \\ \text{s.a.} \quad & x^2+y^2=2 \\ & x+z=1 \end{aligned}$$

Sol.

Debido a que todas las restricciones del problema son de igualdad, podemos utilizar el método del Lagrangeano. Para este problema, se define:

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = x+y+z - \lambda_1(x^2+y^2-2) - \lambda_2(x+z-1)$$

y buscamos pts para los cuales se tenga que $\nabla L = 0$.
Calculamos:

$$\nabla L = \begin{pmatrix} 1 - 2\lambda_1 x - \lambda_2 \\ 1 - 2\lambda_1 y \\ 1 - \lambda_2 \\ -(x^2+y^2-2) \\ -(x+z-1) \end{pmatrix} = 0 \quad \text{s.s.} \quad \begin{aligned} 1 - 2\lambda_1 x - \lambda_2 &= 0 & (1) \\ 1 - 2\lambda_1 y &= 0 & (2) \\ 1 - \lambda_2 &= 0 & (3) \\ x^2+y^2 &= 2 & (4) \\ x+z &= 1 & (5) \end{aligned}$$

Luego, para encontrar los puntos críticos, debemos resolver el sistema.

$$(3) \Rightarrow \lambda_2 = 1$$

$$\text{en (1)} \Rightarrow 2\lambda_1 x = 0$$

Con esto, $\lambda_1 = 0$ o $x = 0$. Pero no es posible que λ_1 sea nulo, pues de (2), $2\lambda_1 y = 1 \Rightarrow x = 0$

Con esto, de (4) obtenemos que $y = \pm\sqrt{2}$
de (5), $z = 1$

$$\text{de (2)} \quad \lambda_1 = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Hemos resuelto el sistema, el cual arrojó:

$$(x_0, y_0, z_0, \lambda_1, \lambda_2) = (0, \pm\sqrt{2}, 1, \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}, 1)$$

Tenemos entonces 2 puntos críticos. Podríamos entonces probar sus valores y ver cual de ellos es el mínimo, pero se solicita verificar usando criterio de 2º orden.

Como es un problema de minimización, consideremos el conjunto: (de direcciones críticas)

$$K(x) = \{ h \in \mathbb{R}^3 \mid \nabla g_i(x)^T h = 0 \quad \forall i = 1 \dots 2, \quad \nabla f(x)^T h \leq 0 \}$$

y tenemos que verificar que

$$h^T H_x L(x_0, y_0, z_0, \lambda_1, \lambda_2) h > 0, \quad \forall h \in K(x), \quad h \neq 0$$

para concluir que x_0 es punto mínimo.

Calculamos $H_x L(x_0, y_0, z_0, \lambda_1, \lambda_2)$

$$H_x L = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & -2\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Al evaluar en los pto. críticos, se obtiene que:

$$H_x L(x_0, y_0, z_0, \lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} \mp 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \mp 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se tiene que para el punto $(0, -\sqrt{2}, 1, -\frac{1}{2\sqrt{2}}, 1)$

$H_x L(x, \lambda)$ es definida semi-positiva. Ahora, debemos considerar el conjunto de direcciones críticas para el punto $(0, -\sqrt{2}, 1, -1/2\sqrt{2}, 1)$, del cual se desprende que $\vec{h} \in K(x_0) \Leftrightarrow \vec{h} = h \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, con $h \in \mathbb{R}$.

Se tiene entonces que:

$$\vec{h}^T H_x L \vec{h} = h^2 (1 \ 0 \ -1) \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{h^2}{\sqrt{2}} > 0$$

Se concluye entonces que $(x_0, y_0, z_0) = (0, -\sqrt{2}, 1)$ minimiza la fn $x+y+z$ con las restricc. dadas.

nota:

- Es necesario que $\{\nabla g_i(x_0)\}_{i=1}^2$ sean l.i, lo cual se tiene en este problema, pues:

$$\nabla g_1(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g_2(x_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

P2 Considere $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y) = (e^x + e^y, e^x + e^{-y})$.
 Determine en que puntos de \mathbb{R}^2 f es localmente invertible, y además verifique que en $a = (0,0)$ f es invertible y determine un valor aproximado de f^{-1} es el punto $c = (2,02; 1,98)$

Sol.

Usaremos teo. de la inv. inversa.

Claramente f es de clase \mathcal{C}^1 en $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^2$, por álgebra de fns. de clase \mathcal{C}^1 .

Sea $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Para que f sea localmente invertible en torno a (x,y) es necesario que $DF(x,y)$ sea invertible. Calculemos entonces $DF(x,y)$

$$DF(x,y) = \begin{bmatrix} e^x & e^y \\ e^x & -e^y \end{bmatrix}$$

Para ver su invertibilidad, estudiemos $\det(DF(x,y))$:

$$\det(DF(x,y)) = -e^{x-y} - e^{x+y} = -e^x(e^{-y} + e^y)$$

, el cual es distinto de cero $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, por lo que será siempre localmente invertible.

En particular, para $a = (0,0)$, se tiene que $\det(DF(0,0)) = -2 \neq 0$ y como f es \mathcal{C}^1 , será localmente invertible.

Para obtener un valor aproximado de f^{-1} , podemos utilizar una aproximación de 1º orden, dada por:

$$f^{-1}(x,y) \approx f^{-1}(x_0, y_0) + DF^{-1}(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

Nota además que $f(0,0) = (2,2)$

Entonces; usando nuevamente el teorema de la fu. inversa, sabemos que

$$Df^{-1}(b) = [Df(a)]^{-1}, \text{ con } f(a) = b$$

y aplicamos a aprox. lineal:

$$f^{-1}(2,02; 1,98) \approx f^{-1}(2,2) + Df^{-1}(2,2) \begin{pmatrix} 2,02 - 2 \\ 1,98 - 2 \end{pmatrix}$$

Falta entonces calcular $[Df(2,2)]^{-1}$: $Df(2,2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1 & 0 \\ 1 & -1 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1 & 0 \\ 0 & -2 & | & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1 & 0 \\ 0 & 1 & | & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & | & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Entonces: } (Df(2,2))^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Por lo que:

$$f^{-1}(2,02; 1,98) \approx (0,0) + \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,02 \\ -0,02 \end{pmatrix}$$

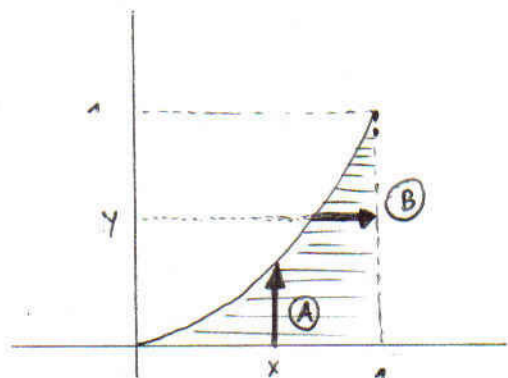
$$\approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0,02 \end{pmatrix}$$

$\boxed{P_3}$ Calcule $I = \iint_R (x^2 + y^2) dx dy$

, donde $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$

Sol.

Para enfrentar estos problemas, siempre es bueno bosquejar el área de integración:



Es posible describir la zona de dos maneras:

(A) Dado un "x", subir desde 0 a x^2 en y, con "x" entre 0 y 1

(B) Dado un "y", ir desde \sqrt{y} hasta 1, con "y" entre 0 y 1.

Luego, por teo. de Fubini, podemos calcular:

$$I = \underbrace{\int_0^1 \int_0^{x^2} (x^2 + y^2) dy dx}_{(A)} = \underbrace{\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 (x^2 + y^2) dx dy}_{(B)}$$

Calculemos de las dos maneras:

$$\begin{aligned} (A) \quad \int_0^1 \int_0^{x^2} x^2 + y^2 dy dx &= \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} x^2 + y^2 dy \right) dx = \int_0^1 \left(yx^2 \Big|_0^{x^2} + \frac{1}{3} y^3 \Big|_0^{x^2} \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(x^4 + \frac{1}{3} x^6 \right) dx = \frac{1}{5} x \Big|_0^1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7} x^7 \Big|_0^1 = \frac{26}{105} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (B) \quad \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 x^2 + y^2 dx dy &= \int_0^1 \left(\frac{1}{3} x^3 \Big|_{\sqrt{y}}^1 + xy^2 \Big|_{\sqrt{y}}^1 \right) dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{3} (1 - y^{3/2}) + (1 - \sqrt{y}) y^2 \right) dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} y^{3/2} + y^2 - y^{5/2} \right) dy = \frac{1}{3} - \frac{1}{3(\frac{3}{2}+1)} + \frac{1}{3} - \frac{1}{\frac{7}{2}+1} \\ &= \frac{26}{105} \end{aligned}$$