

Roberto Cortez Milán

P1 Encontrar los extremos de la función

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$$

Sobre el conjunto $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Solución: antes de atacar el problema, observemos que:

- (1) El conjunto de restricciones $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ no está descrito por restricciones de igualdad, así que no podemos aplicar directamente el teorema de los multiplicadores de Lagrange.
- (2) Encontrar los extremos de f sobre S significa encontrar el máximo global y mínimo global de f restringida a S .
- (3) Como f es continua y S es compacto, los extremos se alcanzan.

Como no podemos aplicar directamente el teorema de los mult. de Lagrange, haremos lo siguiente: buscaremos todos los candidatos a extremo al interior de S , y luego todos los candidatos en la frontera de S . Una vez obtenidos todos los candidatos, evaluaremos f en cada uno de ellos y veremos cuál es mínimo y cuál es máximo.

(1°) Sea $(x, y) \in \text{int}(S)$. Para ver cuáles (x, y) son candidatos a punto extremo, analizamos las condiciones clásicas para problemas de optimización sin restricciones, es decir, $\nabla f(x, y) = 0$. Veamos:

$$0 = \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x-1 \\ 4y \end{pmatrix} \Rightarrow (x_1, y_1) = \left(\frac{1}{2}, 0\right).$$

Para ver la naturaleza de este punto crítico, analizamos el Hessiano de f en dicho punto:

$$H_f(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\Rightarrow H_f\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ def. positivo} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, 0\right) = (x_1, y_1) \text{ es mínimo local.}$$

(2°) Sea $(x, y) \in \text{fr}(S)$, es decir, $x^2 + y^2 = 1$. Como (x, y) satisface una restricción de igualdad, podemos aplicar nuestro teorema de mult. de Lagrange para encontrar los candidatos a punto extremo de f sobre $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\} = \text{fr}(S)$.

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + 2y^2 - x - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial x}(x, y, \lambda) = 2x - 1 - 2\lambda x \quad (A)$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial y}(x, y, \lambda) = 4y - 2\lambda y \quad (B)$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = -(x^2 + y^2 - 1) \quad (C)$$

Resolvamos el sistema:

(B) $\Rightarrow y(2-\lambda) = 0$.

(2)

Hay dos casos:

$y \neq 0$ luego $\lambda = 2$. Reemplazando en (A) obtenemos

$$2x - 1 - 4x = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Reemplazando en (C), se llega a:

$$\frac{1}{4} + y^2 - 1 = 0 \Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Luego, $(x_2, y_2) = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

$(x_3, y_3) = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$

Son dos candidatos a extremo.

$y = 0$ Reemplazando en (C):

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

Reemplazando en (A)

$$\Rightarrow 2 - 1 - 2\lambda = 0 \quad \text{o bien} \quad -2 - 1 + 2\lambda = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \quad \text{o bien} \quad \lambda = \frac{3}{2}$$

Luego, $(x_4, y_4) = (1, 0)$

$(x_5, y_5) = (-1, 0)$

Son dos nuevos candidatos a extremo.

NOTA: en el caso general puede ocurrir que aún haya otros candidatos: aquellos puntos \vec{x} tales que el conjunto $\{\nabla g_i(\vec{x})\}_{i=1}^r$ no sea l.i (donde el conjunto de restricciones está dado por

$$\{\vec{x} \mid g_i(\vec{x}) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, r\})$$

En nuestro caso, $r=1$ (sólo hay una restricción) y se tiene $\nabla g_1(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \neq 0$ si $x^2 + y^2 = 1$

así que no se nos escapa ningún candidato.

Ahora que hemos encontrado todos los candidatos a extremo, basta evaluar f en esos puntos y ver cuál punto toma valor más grande y cuál más pequeño. Sin embargo, dado que la idea es aprender, veremos si los puntos (x_2, y_2) , (x_3, y_3) , (x_4, y_4) , (x_5, y_5) son máximos o mínimos locales, usando el criterio de 2º orden para problemas con restricciones. Dicho criterio dice que si $(\bar{x}_0, \bar{\lambda}_0)$ es tal que $\nabla L(\bar{x}_0, \bar{\lambda}_0) = 0$ (i.e., cumple las condiciones del teo. de los mult. de Lagrange) y además

$$h^t H_{\bar{x}}(L, (\bar{x}_0, \bar{\lambda}_0)) h > 0 \quad \forall h \in K(\bar{x}_0), \quad h \neq 0, \quad (*)$$

donde $K(\bar{x}) := \{h \in \mathbb{R}^n \mid \nabla g_i(\bar{x})^t h = 0 \quad \forall i=1, \dots, r, \nabla f(\bar{x})^t h \leq 0\}$

(con $\{\bar{x} \mid g_i(\bar{x}) = 0\}$ el conjunto de restricciones), entonces \bar{x} es un mínimo local (análogamente, será máximo cuando se cumple la condición (*) con < 0 para

$$K(\bar{x}) = \{h \in \mathbb{R}^n \mid \nabla g_i(\bar{x})^t h = 0 \quad \forall i=1, \dots, r, \nabla f(\bar{x})^t h \geq 0\}.$$

Calculemos en nuestro problema la matriz $H_{(x,y)}(L, (x,y,\lambda))$ (la matriz hessiana de L calculada %o a (x,y) , sin considerar λ).

$$L(x,y,\lambda) = x^2 + 2y^2 - x - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x - 1 - 2\lambda x$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 4y - 2\lambda y$$

$$\Rightarrow H_{(x,y)}(L, (x,y,\lambda)) = \begin{bmatrix} 2-2\lambda & 0 \\ 0 & 4-2\lambda \end{bmatrix}$$

Además, en nuestro caso siempre se tiene que $\nabla f(x_i, y_i) = \lambda \nabla g(x_i, y_i) \quad \forall i=2,3,4,5$. Luego, el conjunto $K(x_i, y_i)$ siempre se escribe como (ya sea estemos minimizando o maximizando)

$$K(x_i, y_i) = \{ h \mid \nabla g(x_i, y_i)^t h = 0 \}$$

Ahora analicemos cada punto (x_i, y_i) , $i = 2, 3, 4$ por separado:

- $(x_2, y_2) = (-1/2, \sqrt{3}/2)$. El mult. de Lagrange asociado es $\lambda_2 = 2$. Luego

$$H = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Además: $\nabla g(-1/2, \sqrt{3}/2) = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$. Luego, un h tal que $\nabla g(-1/2, \sqrt{3}/2)^t h = 0$ es de la forma

$$h = \text{cte} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow h^t H h &= \text{cte}^2 (\sqrt{3}, 1) \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \text{cte}^2 (\sqrt{3}, 1) \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} = -6 \cdot \text{cte}^2 < 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, (x_2, y_2) es un máximo local de f restringida a $\text{fr}(S)$.

- $(x_3, y_3) = (-1/2, -\sqrt{3}/2)$. El mult. es $\lambda_3 = 2$, así que H es igual a la de recién. Además:

$\nabla g(-1/2, -\sqrt{3}/2) = \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$, y un h tal que $\nabla g(-1/2, -\sqrt{3}/2)^t h = 0$ es de la forma

$$h = \text{cte} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow h^t H h &= \text{cte}^2 (\sqrt{3}, -1) \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \text{cte}^2 (\sqrt{3}, -1) \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} = -6 \text{cte}^2 < 0 \end{aligned}$$

Luego, (x_3, y_3) es un máximo local de f restringida a $f_r(S)$.

• $(x_4, y_4) = (1, 0)$. El multiplicador asociado es $\lambda_4 = 1/2$.

$$\Rightarrow H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Es def. positiva

$\Rightarrow (x_4, y_4)$ es mínimo local de $f|_{f_r(S)}$
(pues $h^t H h > 0 \quad \forall h \neq 0$, en particular $\forall h \in K(x_4, y_4), h \neq 0$)

• $(x_5, y_5) = (-1, 0)$. El mult. asociado es $\lambda_5 = 3/2$

$$\Rightarrow H = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Además, $\nabla g(-1, 0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Luego, en $h + g \nabla g(-1, 0)^t h = 0$
es de la forma

$$h = \text{cte} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow h^t H h &= \text{cte}^2 (0, 1) \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \text{cte}^2 (0, 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \text{cte}^2 > 0 \end{aligned}$$

Luego, (x_5, y_5) es mínimo local de $f|_{f_r(S)}$.

Finalmente, evaluamos f en los cinco puntos candidatos:

$$f(x_1, y_1) = f(1/2, 0) = 1/4 - 1/2 = -1/4$$

$$f(x_2, y_2) = f(-1/2, \sqrt{3}/2) = 1/4 + 2 \cdot 3/4 + 1/2 = 9/4$$

$$f(x_3, y_3) = f(-1/2, -\sqrt{3}/2) = 1/4 + 2 \cdot 3/4 + 1/2 = 9/4$$

$$f(x_4, y_4) = f(1, 0) = 1 - 1 = 0$$

$$f(x_5, y_5) = f(-1, 0) = 1 + 1 = 2$$

\rightarrow mínimo en S

} ambos son máximos en S

□

P2

Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $y_0 \in \mathbb{R}$ una raíz simple del polinomio con coeficientes reales

$$P(y) = a_0 + a_1 y + \dots + a_n y^n$$

es decir, $P(y_0) = 0$ y $P'(y_0) \neq 0$. Sea $x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Pruebe que en una vecindad de $(0, y_0)$ la ecuación

$$F(x, y) = (a_0 + x_0) + (a_1 + x_1)y + \dots + (a_n + x_n)y^n = 0 \quad (*)$$

admite una única solución $y = g(x)$ de clase C^1 tal que

$$\nabla g(0) = \frac{1}{P'(y_0)} \begin{pmatrix} 1 \\ y_0 \\ \vdots \\ y_0^n \end{pmatrix}$$

Solución: claramente hay que utilizar el teorema de la función implícita. Recordemos que dice:

TEO (fn. implícita) Dada $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1 , y $(a, b) \in \Omega$ tal que $f(a, b) = 0$ y $D_y f(a, b)$ es invertible. Entonces existen vecindades $W \subseteq \mathbb{R}^m$, $V \subseteq \mathbb{R}^n$ tales que $a \in W$, $b \in V$, y una función $g: W \rightarrow V$ tal que $g(a) = b$ y

$$f(x, g(x)) = 0 \quad \forall x \in W$$

$$\text{Además } Dg(x) = -[D_y f(x, g(x))]^{-1} D_x f(x, g(x)) \quad \forall x \in W$$

En nuestro caso

$$\begin{array}{l} M \leftrightarrow n+1 \\ n \leftrightarrow 1 \\ f \leftrightarrow F \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Claramente: } F(0, y_0) &= (a_0 + 0) + (a_1 + 0)y_0 + \dots + (a_n + 0)y_0^n \\ &= a_0 + a_1 y_0 + \dots + a_n y_0^n \\ &= P(y_0) = 0 \end{aligned}$$

$$D_y F(x, y) = (a_1 + x_1) + 2(a_2 + x_2)y + 3(a_3 + x_3)y^2 + \dots + n(a_n + x_n)y^{n-1}$$

$$\rightarrow D_y F(0, y_0) = a_1 + 2a_2 y + 3a_3 y^2 + \dots + na_n y^{n-1} \\ = P'(y_0) \neq 0$$

Luego, en virtud del Teo. fn. implícita, $\exists W \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}$ tal que $0 \in W$, $y_0 \in V$, y una función $g: W \rightarrow V$ tal que $F(x, g(x)) = 0 \quad \forall x \in W$. Esto prueba la existencia de la solución local de (x). Además:

$$Dg(x) = - [D_y F(x, g(x))]^{-1} D_x F(x, g(x))$$

$$\Rightarrow Dg(0) = - [D_y F(0, y_0)]^{-1} D_x F(0, y_0)$$

$$\text{con } D_y F(0, y_0) = P'(y_0)$$

$$D_x F(x, y) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_0}(x, y), \frac{\partial F}{\partial x_1}(x, y), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(x, y) \right)$$

$$= (1, y, y^2, \dots, y^n)$$

$$\Rightarrow Dg(0) = -\frac{1}{P'(y_0)} (1, y_0, y_0^2, \dots, y_0^n)$$

Es decir:

$$\nabla g(0) = Dg(0)^t = -\frac{1}{P'(y_0)} \begin{pmatrix} 1 \\ y_0 \\ y_0^2 \\ \vdots \\ y_0^n \end{pmatrix}$$

□

P3

Pruebe que el sistema de ecuaciones

$$e^u + xy^2 + v = 2$$

$$\text{sen } u + x^2 y + v^3 = 1$$

define a u y v como funciones implícitas diferenciables de las variables x e y en una vecindad de $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (0, 2, 0, 1)$. Sean $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ dichas funciones. Calcule

$$u(0, 2), v(0, 2), \frac{\partial u}{\partial x}(0, 2), \frac{\partial v}{\partial x}(0, 2), \frac{\partial u}{\partial y}(0, 2), \frac{\partial v}{\partial y}(0, 2)$$

(5)

Solución: nuevamente usamos el teo. de la fn. implícita. En este caso $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, con

$$f(x, y, u, v) = \begin{pmatrix} e^u + xy^2 + v - 2 \\ \sin u + x^2y + v^3 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x, y, u, v) \\ f_2(x, y, u, v) \end{pmatrix}$$

Se tiene que

$$f(x_0, y_0, u_0, v_0) = f(0, 2, 0, 1) = \begin{pmatrix} e^0 + 0 + 1 - 2 \\ 0 + 0 + 1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y además

$$D_{(u,v)} f(x, y, u, v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}(x, y, u, v) & \frac{\partial f_1}{\partial v}(x, y, u, v) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}(x, y, u, v) & \frac{\partial f_2}{\partial v}(x, y, u, v) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^u & 1 \\ \cos u & 3v^2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow D_{(u,v)} f(x_0, y_0, u_0, v_0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \text{claramente invertible}$$

En virtud del teo. de la fn. implícita, podemos despejar u, v en función de x e y localmente en torno a (x_0, y_0, u_0, v_0) , mediante una función

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = g(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$$

que cumple $f(x, y, g(x, y)) = 0$ localmente, en torno a (x_0, y_0) . Además, sabemos que

$$g(x_0, y_0) = (u_0, v_0) = (0, 1)$$

en deux

$$u(0,2) = u(x_0, y_0) = u_0 = 0$$

$$v(0,2) = v(x_0, y_0) = v_0 = 1$$

Además, sabemos que

$$Dg(x_0, y_0) = - [D_{(u,v)} f(x_0, y_0, u_0, v_0)]^{-1} D_{(x,y)} f(x_0, y_0, u_0, v_0)$$

$$\text{donde } Dg(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

$$\bullet D_{(u,v)} f(x_0, y_0, u_0, v_0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [D_{(u,v)} f(x_0, y_0, u_0, v_0)]^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \bullet D_{(x,y)} f(x, y, u, v) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, u, v) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y, u, v) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y, u, v) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, u, v) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} y^2 & 2xy \\ 2xy & x^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow D_{(x,y)} f(x_0, y_0, u_0, v_0) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} Dg(x_0, y_0) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(0,2) & \frac{\partial u}{\partial y}(0,2) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(0,2) & \frac{\partial v}{\partial y}(0,2) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \square \end{aligned}$$