

Clase Auxiliar 8

MA22A, Prof. Pierre Guiraud

Viernes 12 de Mayo de 2006

Problema 1

Para $f(u, v, w) = (2v^2 - u^2, uv, w + 1)$ muestre que f es localmente invertible en torno a cualquier punto del conjunto

$$A = \{(u, v, w) \mid u \neq 0 \vee v \neq 0\}$$

Sol.

Claramente debemos usar teorema de la función inversa. Para esto, primero debemos verificar que f es función \mathcal{C}^1 , lo cual resulta ser cierto por álgebra de funciones \mathcal{C}^1 , aplicado a cada una de las tres funciones componente. Luego, queda por ver si el diferencial de la función en algún punto es invertible. Como estamos trabajando con una función de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^3 , bastará revisar la invertibilidad de una matriz de 3×3

Sea $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$, calculamos $Df(u, v, w)$:

$$Df(u, v, w) = \begin{pmatrix} -2u & 4v & 0 \\ v & u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz será invertible ssi su determinante no es nulo.

$$\det(Df(u, v, w)) = \left| \begin{pmatrix} -2u & 4v & 0 \\ v & u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = -2u^2 - 4v^2$$

Así, se puede ver que la matriz será invertible justamente cuando $(u, v, w) \in A$. Se concluye entonces por Teorema de la Función Inversa, que f será localmente invertible en torno a $(u, v, w) \Leftrightarrow (u, v, w) \in A$ •

Problema 2

Las ecuaciones

$$\begin{aligned}x^2 - y \cos(uv) + z^2 &= 0 \\x^2 + y^2 + \sin(uv) + 2z^2 &= 2 \\xy - \sin(u) \cos(v) + z &= 0\end{aligned}$$

pueden definir a x, y, z en función de u, v . Calcular

$$\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v} \quad \text{en } (x, y, z, u, v) = (1, 1, 0, \frac{\pi}{2}, 0)$$

Sol.

Para la solución de este problema usaremos Teorema de la Función Implícita. Primero definimos $F : \mathbb{R}^{2+3} \rightarrow \mathbb{R}^3$ por:

$$F(u, v, x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 - y \cos(uv) + z^2 \\ x^2 + y^2 + \sin(uv) + 2z^2 - 2 \\ xy - \sin(u) \cos(v) + z \end{pmatrix}$$

Con esta definición, se tiene que

$$F(\frac{\pi}{2}, 0, 1, 1, 0) = 0$$

Notar que deliberadamente se ha dispuesto las variables x, y, z a la derecha (las cuales quedarán en función de las ubicadas a la izquierda) como una forma de ordenar las variables para no confundirse después.

Por otro lado, se tiene que F es \mathcal{C}^1 , por álgebra de funciones \mathcal{C}^1 aplicado a cada función componente para F

Calculamos entonces el diferencial $D_y F$ en el punto $(\frac{\pi}{2}, 0, 1, 1, 0)$, que corresponde al diferencial de F con respecto a las variables que se quieren dejar en función de las otras, es decir, en el ejemplo, $D_y F$ es el diferencial de F solamente derivando con respecto a x, y, z . Este diferencial **debe** ser una matriz cuadrada cuadrada, pues después se pedirá su invertibilidad.

$$D_y F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & -\cos(uv) & 2z \\ 2x & 2y & 4z \\ y & x & 1 \end{pmatrix}$$

Al evaluar en el punto solicitado, se obtiene

$$D_y F\left(\frac{\pi}{2}, 0, 1, 1, 0\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora, se debe verificar que esta matriz es invertible, para cumplir con las hipótesis del Teorema de la Fn. Implícita. Para esto, calculamos su determinante:

$$\det(D_y F) = \left| \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right| = 1 \left| \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \right| = 6$$

Concluimos entonces, con la invertibilidad de $D_y F$, y haciendo uso del Teorema de la Función implícita, que existe $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, de la forma:

$$G(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$$

Tal que

$$F(u, v, G(u, v)) = 0$$

Por otro lado, para calcular las derivadas parciales que se piden, notemos que

$$DG = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

y usando Teorema de la Función Implícita, se puede calcular

$$DG = -[D_y F(u, v, G(u, v))]^{-1} D_x F(u, v, G(u, v))$$

Por lo que al calcular en el punto $(\frac{\pi}{2}, 0, 1, 1, 0)$ y considerar las dos primeras componentes de la matriz DG , tendremos las derivadas parciales que nos piden. Calculamos entonces $[D_y F(\frac{\pi}{2}, 0, 1, 1, 0)]^{-1}$ y $D_x F(\frac{\pi}{2}, 0, 1, 1, 0)$

$$[D_y F(\frac{\pi}{2}, 0, 1, 1, 0)]^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D_x F(\frac{\pi}{2}, 0, 1, 1, 0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \\ \frac{\partial F_3}{\partial u} & \frac{\partial F_3}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \pi/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Así, se tiene que

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 0 \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\pi}{12}$$

•

Problema 3

Supongamos que $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es función de clase \mathcal{C}^1 que satisface

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \neq 0 \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

Si se tiene que $f(x, y, z) = c$, con $c \in \text{Im}(\mathbb{R}^3)$, demostrar que

$$\frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = -1 \quad \forall (x, y, z) \in f^{-1}(\{c\})$$

Sol.

Definiendo $F(x, y, z) = f(x, y, z) - c$, podemos suponer que $F(x, y, z) = 0$ define, por ejemplo, a $z = z(x, y)$, y notar que en este caso, al evaluar en algun punto $(x, y, z) \in f^{-1}(\{c\})$

$$D_y F = \frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$$

Por lo cual es invertible, y se puede calcular entonces, usando $G(x, y) = z(x, y)$, y por Teorema de la Función Implícita

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

Haciendo un proceso completamente análogo, podemos suponer $y = y(x, z)$ o bien $x = x(y, z)$, con lo cual se obtiene:

$$\frac{\partial x}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}} \quad \frac{\partial y}{\partial z} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

Entonces, haciendo el producto, se concluye

$$\frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}} \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -1$$

•

Atte.

Ricardo Díaz Riadi