

Roberto Cortez Milán

P1

Sea  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} x + \frac{y \sin x}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Encuentre el conjunto donde  $f$  es de clase  $C^2$ .

Solución: recordemos que una función  $g$  es de clase  $C^2$  si todas sus derivadas parciales  $\frac{\partial g}{\partial x_i}$  existen y son funciones de clase  $C^1$ .

Para  $(x, y) \neq (0, 0)$ , por álgebra de funciones de clase  $C^1$ , sabemos que  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$  existen. Calculemoslas:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 1 + \frac{y(\cos x)(x^2 + y^2) - 2yx \sin x}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{(\sin x)(x^2 + y^2) - 2y^2 \sin x}{(x^2 + y^2)^2}$$

Nuevamente por álgebra de funciones de clase  $C^1$ , se tiene entonces que  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$  son funciones de clase  $C^1$  en  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Es decir,  $f$  es de clase  $C^2$  en  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  (al menos).

Para ver si  $f$  es de clase  $C^2$  en  $\mathbb{R}^2$ , hay que ver que las derivadas de  $f$  en  $(x, y) = (0, 0)$  existen y luego ver que  $\frac{\partial f}{\partial x}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones de clase  $C^1$ .

Veamos que  $\frac{\partial f}{\partial x}$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}$  existen en  $(0,0)$ :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h - 0}{h} = 1 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

Luego,  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$  existen en todo  $\mathbb{R}^2$  y valen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 1 + \frac{y(x^2+y^2)\cos x - 2xy \sin x}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{(x^2+y^2)\sin x - 2y^2 \sin x}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Para ver si  $f$  es de clase  $C^2$  en todo  $\mathbb{R}^2$ , habría que chequear si  $\frac{\partial f}{\partial x}$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}$  son de clase  $C^1$  en  $\mathbb{R}^2$ . Veamos que esto no se tiene, pues  $\frac{\partial f}{\partial x}$  ni siquiera es continua en  $(0,0)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,y) &= 1 + \frac{y(0^2+y^2)\cos 0 - 2 \cdot 0 \cdot y \sin 0}{(0^2+y^2)^2} \\ &= 1 + \frac{y^3}{y^4} = 1 + \frac{1}{y} \end{aligned}$$

Luego, al tomar  $y \rightarrow 0$ , no hay convergencia, luego  $\frac{\partial f}{\partial x}$  no es continua en  $(0,0)$ , con lo cual no podrá ser diferenciable en  $(0,0)$  y no habrá chance de que  $\frac{\partial f}{\partial x}$  sea de clase  $C^1$ .

o.o  $f$  es de clase  $C^2$  en  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

**P2** Sean  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funciones de clase  $C^2$ . Se considera la función  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $F(x, y) = f(xy^2, g(x^2 + y))$ . (2)

(i) Escribiendo  $F$  como  $F = f \circ G$  para una función  $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  apropiada, justificar que  $F$  es  $C^1$  y calcular sus derivadas parciales.

(ii) Justificar que  $F$  es de clase  $C^2$  y calcular  $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y)$ ,  $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x, y)$  en  $\mathbb{R}^2$ .

Solución:

(i) Ponemos

$$G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto G(x, y) = (xy^2, g(x^2 + y))$$

$G$  será de clase  $C^1$  si sus funciones coordenadas son  $C^1$  (tienen derivadas parciales y ellas son continuas).

$$G_1(x, y) = xy^2, \text{ es de clase } C^1$$

$$G_2(x, y) = g(x^2 + y), \text{ es de clase } C^1 \text{ pues es composición de funciones } C^1.$$

Se tiene  $F = f \circ G$ . Como  $f$  y  $G$  son  $C^1$ , se tendrá que  $F$  será  $C^1$  (por ser composición de funciones  $C^1$ ).

Calculemos las derivadas parciales de  $F$ :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} [f \circ G](x, y)$$

regla de la cadena  $\Rightarrow \nabla f(G(x, y))^t \frac{\partial G}{\partial x}(x, y)$

$$= \left( \frac{\partial f}{\partial x}(G(x, y)), \frac{\partial f}{\partial y}(G(x, y)) \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial G_2}{\partial x}(x, y) \end{pmatrix}$$

$$= \left( \frac{\partial f}{\partial x}(xy^2, g(x^2+y)), \frac{\partial f}{\partial y}(xy^2, g(x^2+y)) \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}[xy^2] \\ \frac{\partial}{\partial x}g(x^2+y) \end{pmatrix}$$

$$= \left( \frac{\partial f}{\partial x}(xy^2, g(x^2+y)), \frac{\partial f}{\partial y}(xy^2, g(x^2+y)) \right) \begin{pmatrix} y^2 \\ \frac{\partial}{\partial x}g(x^2+y) \cdot 2x \end{pmatrix}$$

regla de la cadena  $\Rightarrow$

$$= y^2 \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(xy^2, g(x^2+y)) + 2x \cdot g'(x^2+y) \frac{\partial f}{\partial y}(xy^2, g(x^2+y))$$

Análogamente, la derivada de  $F$  % a  $y$  es:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(xy^2, g(x^2+y)), \frac{\partial f}{\partial y}(xy^2, g(x^2+y)) \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}[xy^2] \\ \frac{\partial}{\partial y}g(x^2+y) \end{pmatrix}$$

$$= 2xy \frac{\partial f}{\partial x}(xy^2, g(x^2+y)) + g'(x^2+y) \frac{\partial f}{\partial y}(xy^2, g(x^2+y))$$



(3)

(ii) Tenemos que

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = y^2 \frac{\partial f}{\partial x}(G(x, y)) + 2x g'(x^2 + y) \frac{\partial f}{\partial y}(xy^2, g(x^2 + y))$$

donde  $\frac{\partial F}{\partial x}$  es  $C^1$  pues  $f$  es  $C^2$

$\frac{\partial F}{\partial y}$  idem

$G$  es  $C^1$  (ya lo probamos)

$g'$  es  $C^1$  pues  $g$  es  $C^2$

$y^2$ ,  $x^2 + y$ ,  $2x$  son  $C^1$

luego, por álgebra de funciones  $C^1$  (dado que  $F$  es producto, suma y composición de funciones  $C^1$ ), se tiene que  $\frac{\partial F}{\partial x}$  es  $C^1$ . Lo mismo ocurre con  $\frac{\partial F}{\partial y}$ . Por lo tanto,  $F$  es de clase  $C^2$ .

Calculemos  $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial F}{\partial y} \right](x, y) = 2y \frac{\partial f}{\partial x}(xy^2, g(x^2 + y)) + \\ & 2xy \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(xy^2, g(x^2 + y)) \cdot y^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(xy^2, g(x^2 + y)) g'(x^2 + y) 2x \right] \\ & + g''(x^2 + y) 2x \frac{\partial f}{\partial y}(xy^2, g(x^2 + y)) \\ & + g'(x^2 + y) \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(xy^2, g(x^2 + y)) y^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(xy^2, g(x^2 + y)) g'(x^2 + y) 2x \right] \end{aligned}$$

Como  $f$  es  $C^2$ , se tiene que  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  (por teorema de Schwarz). luego, reescribimos lo anterior como

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(xy^2, g(x^2+y)) [2xy^3] + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(xy^2, g(x^2+y)) [2xg'(x^2+y)^2] \\ &\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(xy^2, g(x^2+y)) [g'(x^2+y) 4x^2y + g'(x^2+y) y^2] \\ &\quad + 2y \frac{\partial f}{\partial x}(xy^2, g(x^2+y)) + g''(x^2+y) 2x \frac{\partial f}{\partial y}(xy^2, g(x^2+y)) \end{aligned}$$

Nuevamente por Schwarz, se tiene que  $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$ , así que nos ahorramos calcular la otra derivada.  $\square$

**P3**

Sea  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^2$  que satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (*)$$

Mostrar que una función  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que es  $C^2$  y  $f(x, y) = g(x+y, x-y)$ , cumple que  $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u, v) = 0$   $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$ .

Encuentre una solución general de (\*).

Solución: derivemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial u}(x+y, x-y) + \frac{\partial g}{\partial v}(x+y, x-y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial u}(x+y, x-y) - \frac{\partial g}{\partial v}(x+y, x-y)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(x+y, x-y) + \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(x+y, x-y) \\ &\quad + \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(x+y, x-y) + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(x+y, x-y) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(x+y, x-y) - \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(x+y, x-y) \\ &\quad - \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(x+y, x-y) + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(x+y, x-y) \end{aligned} \quad (2)$$

(4)

Como  $f$  satisface  $(*)$  se tiene que  $(1) = (2)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(x+y, x-y) + \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(x+y, x-y) + \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(x+y, x-y) + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(x+y, x-y) \\ &= \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(x+y, x-y) - \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(x+y, x-y) - \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(x+y, x-y) + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(x+y, x-y) \end{aligned}$$

Como  $g$  es  $C^2$ , se tiene  $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}$ , luego

$$2 \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(x+y, x-y) = 2 \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(x+y, x-y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(x+y, x-y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Así, dados  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ , poniendo

$$\begin{aligned} x+y &= u \\ x-y &= v \end{aligned}$$

en decir, tomando  $x = \frac{u+v}{2}$ ,  $y = \frac{u-v}{2}$ , se concluye que

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u, v) = 0 \quad \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2 \quad (**)$$

Busquemos ahora soluciones de  $(*)$ , para lo cual buscamos soluciones de  $(**)$ : si  $g$  cumple la ecuación anterior, entonces  $\frac{\partial g}{\partial u}$  no depende de  $v$  y  $\frac{\partial g}{\partial v}$  no depende de  $u$ , en decir

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = h_1(u), \quad \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = h_2(v)$$

$$\Rightarrow g(u, v) = H_1(u) + H_2(v), \quad \text{con} \quad \begin{aligned} H_1: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ H_2: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

luego, una función  $f$  de la forma

$$f(x, y) = g(x+y, x-y) = H_1(x+y) + H_2(x-y) \quad \text{es solución de } (*)$$

□