

P1) Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- (a) Analice la diferenciabilidad de f en $(x_0, y_0) \neq (0,0)$. Luego, calcule los derivados parciales para $(x_0, y_0) \neq (0,0)$
- (b) Analice la diferenciabilidad en el origen.
 Hint: Para esto, calcule por definición los derivados parciales y aplíquelas en el límite correspondiente a la definición de diferenciabilidad
- (c) Decida donde f es función \mathcal{C}^1
- (d) Obtenga la aproximación lineal de f para el pto $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ y calcule explícitamente para $(x_0, y_0) = (1,1)$

Sol.

- (a) Una manera rápida de asegurar la diferenciabilidad de f en $(x,y) \neq (0,0)$ es notar que f es producto, composición, etc. de fns. diferenciables de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R} .

Luego, es fácil concluir que para $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ la función será diferenciable, por álgebra de diferenciables (deben decirlo!!)

Para estos puntos, dado que f es diferenciable, existirán todos su derivados parciales. Calculemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{2xy(x^2 + y^2) - x^2 y \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{x^2(x^2 + y^2) - x^2 y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^4 - x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

- (b) Para ver la diferenciabilidad por definición en $(0,0)$, pues no se puede ocupar álgebra, debemos analizar el límite:

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{|f(h_1, h_2) - f(0,0) - Df(0,0) \cdot (h_1, h_2)|}{\|(h_1, h_2)\|}$$

Para algún $Df(0,0)$. Si éste existiera, se tendría que:

$$Df(0,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \right)$$

Calculamos entonces por definición $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0,t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} 0 = 0$$

Luego, de existir $Df(0,0)$ se tendría que $Df(0,0) = (0,0)$

Podemos entonces analizar el límite anterior: (con $\|\cdot\|_2$)

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{|f(h_1, h_2) - f(0,0) - (0,0) \cdot (h_1, h_2)|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \quad \text{y} \quad f(0,0) = 0$$

Pero si consideramos $\Gamma_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x=y\}$, entonces

$$\lim_{\substack{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0) \\ (h_1, h_2) \in \Gamma_3}} \frac{|f(h_1, h_2)|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \lim_{(h,h) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{\sqrt{h^2 + h^2}} \left| \frac{h^2 h}{h^2 + h^2} \right| = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Por lo cual se concluye que f no puede ser diferenciable en $(0,0)$, pues el límite anterior debería ser 0 para poder ser diferenciable.

(c) Para esto, debemos analizar la continuidad de los derivados parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

La cual es claramente continua en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ por álgebra de continuas, y no es continua en $(0,0)$. En efecto, si consideramos $\Gamma_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x=y\}$, se tiene que

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\Gamma_1} = \frac{2xx^3}{(x^2+x^2)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Con lo que} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\Gamma_1} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow f$ no es continua en $(0,0)$

$\therefore \frac{\partial f}{\partial x}$ es continua en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} \frac{x^4 - x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Continua en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ por álgebra en fns. continuas,
 y no continua en $(0, 0)$: Si consideramos

$$\Gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y=0\}$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\Gamma_2} = \frac{x^4}{x^4} = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\Gamma_2} = 1$$

$\therefore \frac{\partial f}{\partial y}$ continua en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

Se concluye entonces que f es \mathcal{C}^1 en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

(d) La aproximación lineal para (x_0, y_0) será:
 (donde (x_0, y_0) es tal que f es diferenciable)

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + Df(x_0, y_0) \cdot [(x, y) - (x_0, y_0)]$$

Entonces, considerando $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ y que

$$Df(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right), \text{ se tiene:}$$

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + \begin{pmatrix} \frac{2x_0 y_0^3}{(x_0^2 + y_0^2)^2} \\ \frac{x_0^4 - x_0^2 y_0^2}{(x_0^2 + y_0^2)^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

Para $(x_0, y_0) = (1, 1)$

$$L(x, y) = \frac{1}{2} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}x$$

2) Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2) \ln(x^2+y^2) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Idem (a), (b), (c) de P1.

Sol. Ahora, la solución más rápida:

Para $(x,y) \neq (0,0)$ la fn. es diferenciable por álgebra de fns. diferenciables. Sabiendo entonces que los ders. parciales existen, calculamos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \ln(x^2+y^2) + \frac{(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)} \cdot 2x = 2x [1 + \ln(x^2+y^2)]$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y \ln(x^2+y^2) + \frac{(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)} \cdot 2y = 2y [1 + \ln(x^2+y^2)]$$

(b) Buscamos por definición $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$; $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 \ln t^2}{t} = 2 \lim_{t \rightarrow 0} t \ln t = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 \ln t^2}{t} = 0$$

Ahora, revisamos el límite siguiente para verificar diferenciableidad en $(0,0)$

$$\begin{aligned} & \lim_{(t_1, t_2) \rightarrow (0,0)} \frac{|f(t_1, t_2) - f(0,0) - Df(0,0) \cdot (t_1, t_2)|}{\|(t_1, t_2)\|} \\ &= \lim_{(t_1, t_2) \rightarrow (0,0)} \frac{(t_1^2 + t_2^2) \ln(t_1^2 + t_2^2)}{\sqrt{t_1^2 + t_2^2}} \leq \sqrt{t_1^2 + t_2^2} \ln(t_1^2 + t_2^2) \end{aligned}$$

pero $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \ln x \\ 0 \end{cases}$ es continua en $(0,0)$ (verificado),
por lo que el límite anterior es cero.

$\therefore f$ diferenciable en todo \mathbb{R}^2

(c) ppto.
[f es \mathcal{C}^1 en \mathbb{R}^2]

(P3) Sea $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $4q$

$$H(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2) \right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0) & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- (a) Determinar dónde H es diferenciable
- (b) Determinar dónde H es \mathcal{C}^1
- (c) Encuentra $DH(x_0, y_0)$, con (x_0, y_0) tal que H es diferenciable.

Sol.

De las partes anteriores, y sabiendo que H será diferenciable si sus funciones componente son diferenciables (lo mismo para el caso de \mathcal{C}^1), se tiene que

(a) H es diferenciable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

(b) H es \mathcal{C}^1 en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

(c) Sabemos que $[Df(x_0, y_0)]_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0, y_0)$, entonces

$$\begin{aligned} DH(x_0, y_0) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right) & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left((x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2) \right) & \frac{\partial}{\partial y} \left((x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2) \right) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2x_0 y_0^3}{(x_0^2 + y_0^2)^2} & \frac{x_0^4 - x_0^2 y_0^2}{(x_0^2 + y_0^2)^2} \\ 2x_0(1 + \ln(x_0^2 + y_0^2)) & 2y_0(1 + \ln(x_0^2 + y_0^2)) \end{bmatrix} \end{aligned}$$