

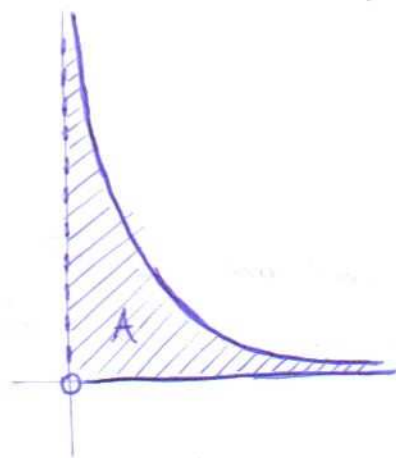
Roberto Cortez Milán.

P1

Sea $A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, y \leq 1/x \}$.

Encontrar $\text{adh}(A)$, $\text{int}(A)$, $\text{fr}(A)$. ¿Es A abierto?,
¿es A cerrado?, ¿es $\text{adh}(A)$ compacto? Justifique.

Solución: hacemos un dibujo para ver las cosas:



Llamando

$$F_1 = \{ (x, y) \mid x = 0, y \geq 0 \}$$

$$F_2 = \{ (x, y) \mid y = 0, x \geq 0 \}$$

$$F_3 = \{ (x, y) \mid x, y > 0, y = 1/x \}$$

se tiene que

$$\text{adh}(A) = A \cup F_1 = \{ (x, y) \mid [x > 0, y > 0, y \leq 1/x] \vee [x = 0, y \geq 0] \}$$

$$\text{int}(A) = A \setminus (F_1 \cup F_3) = \{ (x, y) \mid x > 0, y > 0, y < 1/x \}$$

$$\text{fr}(A) = F_1 \cup F_2 \cup F_3 = \{ (x, y) \mid x, y \geq 0 \wedge [x = 0 \vee y = 0 \vee (x, y \neq 0, y = 1/x)] \}$$

¿ A abierto? No, pues $A \neq \text{int}(A)$

¿ A cerrado? No, pues $A \neq \text{adh}(A)$

¿ $\text{adh}(A)$ compacto? No, pues $\text{adh}(A)$ no es acotado,
luego no puede ser compacto. //

P2

Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{si } y \geq x \\ \frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|} & \text{si } x > y \end{cases}$$

Estudiar la continuidad de f en todo \mathbb{R}^2 .

Solución: pongamos

$$D_1 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x \}$$

$$D_2 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y \}$$

y las funciones

$$g(x,y) = x^2 + y^2 \quad \text{definida y continua en } \mathbb{R}^2$$

$$h(x,y) = \frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|} \quad \text{definida y continua en } \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$$

Si $\vec{x} \in \text{int}(D_1)$ entonces $\exists B(\vec{x}, \varepsilon) \subseteq D_1$ y luego

$$\lim_{\vec{y} \rightarrow \vec{x}} f(\vec{y}) = \lim_{\vec{y} \rightarrow \vec{x}} g(\vec{y}) \overset{\substack{\uparrow \\ g \text{ continua en } \mathbb{R}^2 \supseteq \text{int}(D_1)}}}{=} g(\vec{x}) = f(\vec{x})$$

Análogamente, si $\vec{x} \in \text{int}(D_2)$, $\exists B(\vec{x}, \varepsilon') \subseteq D_2$ y luego

$$\lim_{\vec{y} \rightarrow \vec{x}} f(\vec{y}) = \lim_{\vec{y} \rightarrow \vec{x}} h(\vec{y}) \overset{\substack{\uparrow \\ h \text{ continua en } \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\} \supseteq \text{int}(D_2)}}}{=} h(\vec{x}) = f(\vec{x})$$

Luego f es continua en $\text{int}(D_1) \cup \text{int}(D_2)$ (al menos).
Queda ver qué pasa con la continuidad de f en el conjunto $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y \}$. Nos ayuda la siguiente proposición:

(2)

Proposición: sea $\varphi: E \rightarrow F$ una función definida de un e.v.n. E en un e.v.n. F . Sean $A, B \subseteq E$ tales que $A \cup B = E$ y sea $x \in \text{adh}(A) \cap \text{adh}(B)$. Entonces, si ambos límites

$$\lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in A}} \varphi(y) \quad , \quad \lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in B}} \varphi(y)$$

existen y valen lo mismo (es decir, ambos existen y toman el valor $\varphi(x)$) entonces φ es continua en x .

DEM: sea $\varepsilon > 0$. Debemos encontrar $\delta > 0$ tal que $y \in B(x, \delta) \Rightarrow \varphi(y) \in B(\varphi(x), \varepsilon)$.

Como $\lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in A}} \varphi(y) = \varphi(x)$, se tiene que $\exists \delta_1 > 0$ tal que

$$y \in B(x, \delta_1) \cap A \Rightarrow \varphi(y) \in B(\varphi(x), \varepsilon)$$

Como $\lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in B}} \varphi(y) = \varphi(x)$, $\exists \delta_2 > 0$ tal que

$$y \in B(x, \delta_2) \cap B \Rightarrow \varphi(y) \in B(\varphi(x), \varepsilon)$$

Tomando $\delta = \min \{ \delta_1, \delta_2 \}$ se tiene que

$$\begin{aligned} B(x, \delta) &\subseteq B(x, \delta_1) \\ B(x, \delta) &\subseteq B(x, \delta_2) \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{l} \text{pues } \delta \text{ es más} \\ \text{chico que ambos} \end{array} \right)$$

y como $E = A \cup B$, se tiene que

$$y \in B(x, \delta) \Rightarrow \begin{array}{l} y \in B(x, \delta_1) \cap A \\ y \in B(x, \delta_2) \cap B \end{array} \quad \text{o bien}$$

De cualquiera de las dos maneras se concluye que
 $y \in B(x, \delta) \Rightarrow \varphi(y) \in B(\varphi(x), \epsilon)$

que es lo que queríamos demostrar. //

Volviendo con nuestro problema, en virtud de la proposición, basta chequear para cuáles $x \in D$ (donde en este caso $D = f(D_1) = f(D_2)$) se tiene

$$\lim_{\substack{\vec{y} \rightarrow \vec{x} \\ \vec{y} \in D_1}} f(\vec{y}) = f(\vec{x}) = \lim_{\substack{\vec{y} \rightarrow \vec{x} \\ \vec{y} \in D_2}} f(\vec{y})$$

Como g es continua en todo \mathbb{R}^2 , se tiene

$$\lim_{\substack{\vec{y} \rightarrow \vec{x} \\ \vec{y} \in D_1}} f(\vec{y}) = \lim_{\substack{\vec{y} \rightarrow \vec{x} \\ \vec{y} \in D_1}} g(\vec{y}) = g(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in D$$

Como h es continua en todo $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, se tiene

$$\lim_{\substack{\vec{y} \rightarrow \vec{x} \\ \vec{y} \in D_2}} f(\vec{y}) = \lim_{\substack{\vec{y} \rightarrow \vec{x} \\ \vec{y} \in D_2}} h(\vec{y}) = h(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in D \setminus \{(0,0)\}$$

Por lo tanto, si $\vec{x} \in D$ y $\vec{x} \neq (0,0)$, para ver si f es continua en \vec{x} , basta ver si $g(\vec{x}) = h(\vec{x})$. Veamos: sea $\vec{x} = (x, y) \neq (0,0)$ con $\vec{x} \in D$ (i.e., $x=y$):

$$\begin{aligned} g(\vec{x}) = h(\vec{x}) & \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{x^2 + y^2}{|xy| + |x| + |y|} \\ & \Leftrightarrow x^2 + x^2 = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + |x| + |x|} \\ & \Leftrightarrow 2x^2 = \frac{2x^2}{x^2 + 2|x|} \end{aligned}$$

(3)

$$\text{ssi } x^2 + 2|x| = 1$$

$$\text{ssi } |x|^2 + 2|x| - 1 = 0$$

$$\text{ssi } |x| = \frac{-2 + \sqrt{4+4}}{2} \quad \left(\begin{array}{l} \text{la otra raíz} \\ \text{no puede ser,} \\ \text{pues } |x| \geq 0 \end{array} \right)$$

$$\text{ssi } |x| = \sqrt{2} - 1$$

$$\text{ssi } x = \sqrt{2} - 1 \text{ o bien } x = 1 - \sqrt{2}$$

Luego, f es continua en (x, x) , con $x \neq 0$,
si y sólo si $x = \sqrt{2} - 1$ o bien $x = 1 - \sqrt{2}$.

Queda ver qué pasa en $\vec{x} = (0, 0)$. Como
antes,

$$\lim_{\substack{\vec{y} \rightarrow (0,0) \\ \vec{y} \in D_1}} f(\vec{y}) = g(0,0) = 0$$

Para el límite por D_2 , debemos calcular

$$\lim_{\substack{\vec{y} \rightarrow (0,0) \\ \vec{y} \in D_2}} h(\vec{y})$$

y ver si se obtiene 0, en cuyo caso
 f será continua en $(0,0)$. Veamos:

$$0 \leq h(x, y)$$

$$= \frac{x^2 + y^2}{|xy| + |x| + |y|}$$

$$= \frac{\frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|}}{\frac{|xy|}{|x| + |y|} + 1} \leq \frac{\frac{x^2}{|x| + |y|} + \frac{y^2}{|x| + |y|}}{1} \leq \frac{x^2}{|x|} + \frac{y^2}{|y|}$$

0 sea:

$$0 \leq h(x, y) \leq |x| + |y| \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0$$

$$\text{Luego, } \lim_{\substack{\vec{q} \rightarrow (0, 0) \\ \vec{q} \in D_2}} f(\vec{q}) = 0 = \lim_{\substack{\vec{q} \rightarrow (0, 0) \\ \vec{q} \in D_1}} f(\vec{q})$$

Por lo tanto f es continua en $(0, 0)$.
Juntando esto con todo lo anterior, se tiene
que f es continua en el conjunto

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y \wedge [x = \sqrt{2} - 1 \vee x = 1 - \sqrt{2} \vee x = 0] \}$$