P3 C1 2005

(a) Sea $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Pruebe que f es continua en $\mathbb{R}^2$.

Ind: usar $\varepsilon-\delta$ para cont. en $(0,0)$

Sol:

Para probar la continuidad de una función sobre un conjunto, debemos probar que para todo punto de tal conjunto se tiene la continuidad de la fn. Veamos:

① Para $(x,y) \neq (0,0)$, las funciones $f_1(x,y) = x^2 y$ y $f_2(x,y) = x^2+y^2$ no tienen problemas (son continuas), y por tanto

$$f(x,y) = \frac{f_1(x,y)}{f_2(x,y)}$$

también será continua (todo esto, fundamentado en álgebra de fns. continuas)

② Para $(x,y) = (0,0)$, aparecen los problemas: x^2+y^2 es cero.

Sin embargo, aún se puede hacer algo para que f sea continua en $\mathbb{R}^2$: se debe cumplir que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = f((0,0)) = 0 \qquad (*)$$

Por indicación, debemos usar la definición $(\varepsilon-\delta)$ para verificar $(*)$, la cual dice:

" $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \mid 0 < \| x - x_0 \| < \delta \wedge x \in A \Longrightarrow \| f(x) - l \| < \varepsilon$ "

De donde reconocemos que $x_0 = 0$, $A = \mathbb{R}^2$, $l = 0$ y finalmente

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$$

Comenzamos:

Sea $\varepsilon > 0$, busquemos δ, tal que, básicamente
$$\|(x,y)\| < \delta \Rightarrow |f(x,y)| < \varepsilon$$

Si consideramos $\|\cdot\|_\infty$ en $\mathbb{R}^2 \Rightarrow |x| < \delta \wedge |y| < \delta$
y por otro lado

$$|f(x,y)| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{|x|^2|y|}{|x^2+y^2|} < \varepsilon$$

Pero $\frac{|x|^2|y|}{|x^2+y^2|} \leq \frac{|x|^2|y|}{|x^2|}$, pues $y^2 \geq 0$

$= |y|$ si $x \neq 0$

$< \delta$ (si $x = 0$, la prop. está lista)

Luego, basta tomar $\delta < \varepsilon$. //

(P)

Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$$

Determine su dominio de definición, cómo extenderla continuamente si es posible y decidir si en $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$, $f|_\Omega$ es unif. continua.

Sol:

f está definida en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, pues $\ln(0)$ no está definido, y por otro lado, $x^2+y^2 > 0$ si $(x,y) \neq (0,0)$

Luego, $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ y es fácil ver que $\mathrm{Adher}(\mathrm{Dom}(f)) = \mathbb{R}^2$, por lo que tiene sentido entonces buscar el límite de $f(x,y)$ con $(x,y) \to (0,0)$

Debemos estudiar entonces:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2) \qquad (*)$$

, pues sólo en $(0,0)$ hay problemas, y en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ además se tiene que f es continua, por composición y producto de fns. continuas.

Para estudiar $(*)$, podemos notar que, si tenemos las funciones:

$$\alpha: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad \text{y} \qquad \beta: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tal que}$$
$$(x,y) \mapsto x^2+y^2$$

$$\beta(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Entonces se tiene que

$$f(x,y) = (\beta \circ \alpha)(x,y)$$

y como α y β son continuas (verifícalo), por composición, se tendrá que f será continua.

Luego, para extender continuamente en $(0,0)$, definimos f:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2) & \text{si } x \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } x = (0,0) \end{cases}$$

Así, f será continua en $\mathbb{R}^2$

Ahora, notando que Ω es conjunto cerrado y acotado en $\mathbb{R}^2$ (dimensión finita), se tiene que es también compacto y como $f|_\Omega$ es fn. continua sobre un compacto, será uniformemente continua

P Sea f definida por:

$$f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2-y}}$$

a) Encuentre el conjunto donde se puede definir f, es decir, Dom (f). Grafique. Encuentre además der (Dom (f)).

b) Encuentre las curvas de nivel de f

c) Refiérase a la continuidad de f en Dom (f). Extienda por continuidad f donde sea posible.

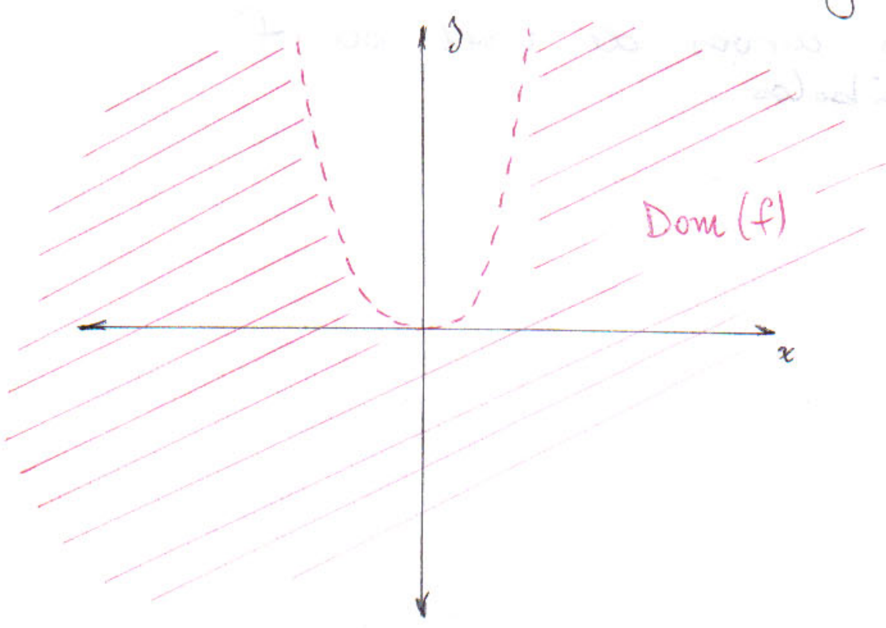
Sol.

(a) f no está definida solo si $\sqrt{x^2-y} = 0$ ó $x^2 - y < 0$, es decir, debe cumplirse que

$$x^2 - y > 0 \iff x^2 > y$$

Esto es, una parábola en $\mathbb{R}^2$ determinará el dominio. Veamos:

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq y \} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 > y \}$$

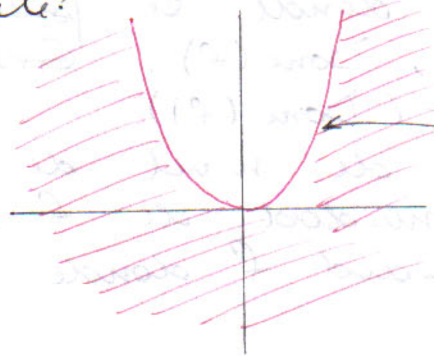


Así, podemos encontrar entonces der (Dom (f)), el cual será:

$$\text{der}(\text{Dom}(f)) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \geq y \}$$ (Verifícarlo)

(antes era un ">")

Gráficamente:



ya no hay línea punteada.

Busquemos curvas de nivel: debemos establecer la igualdad:

$$f(x,y) = c \iff c = \frac{x}{\sqrt{x^2-y}} \iff c\sqrt{x^2-y} = x$$

$$\Rightarrow c^2(x^2-y) = x^2$$

$$\Rightarrow x^2\left(1-\frac{1}{c^2}\right) = y$$

Luego, las curvas de nivel de f son parábolas.

(c) Dado que f es composición, producto, división, etc. de funciones continuas en dom(f), se tendrá que f también lo será (justificado por álgebra de fns. continuas).

Ahora, para los puntos frontera de der(Dom(f)), en donde f no está definido, es decir, donde $x^2 = y$, queremos ver la posibilidad de extender por continuidad.

Notemos que $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ (x_0,y_0)\in der(Dom(f))}} f(x,y)$ solo podría

existir si $(x_0, y_0) = (0,0)$, pues en otro caso no tiene sentido pretender que

$\dfrac{x}{\sqrt{x^2-y}}$ converja, ya que $\sqrt{x^2-y}$ siempre tendería a cero, por lo que necesitamos que x también lo haga.

Luego, analicemos $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x}{\sqrt{x^2-y}}$, y para esto, consideremos los conjuntos:

$$\Gamma_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y = -x^2\}$$
$$\Gamma_2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x = 0,\ y \neq 0\}$$

Notar que:

$$f\big|_{\Gamma_1} = \frac{x}{\sqrt{x^2+x^2}} = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (x \neq 0)$$

$$f\big|_{\Gamma_2} = \frac{0}{\sqrt{-y}} = 0 \qquad (y<0)$$

Con lo que se tiene que

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f\big|_{\Gamma_1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f\big|_{\Gamma_2} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ f no puede tener límite en $(0,0)$

Luego, no se puede extender la función f por continuidad a ningún punto de $\operatorname{der}(\operatorname{Dom}(f))$

(P)

Sean las funciones:

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}, \text{ en } \mathbb{R}^2$$

$$f_2(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

en $\Omega = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \}$

$f_3(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-y}}$ en $\operatorname{Dom}(f_3) \setminus \{$

0 si $x^2 = y$

Se define $g : \text{Dom}(g) \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
como:

$$g(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \\ f_3(x,y) \end{pmatrix}$$

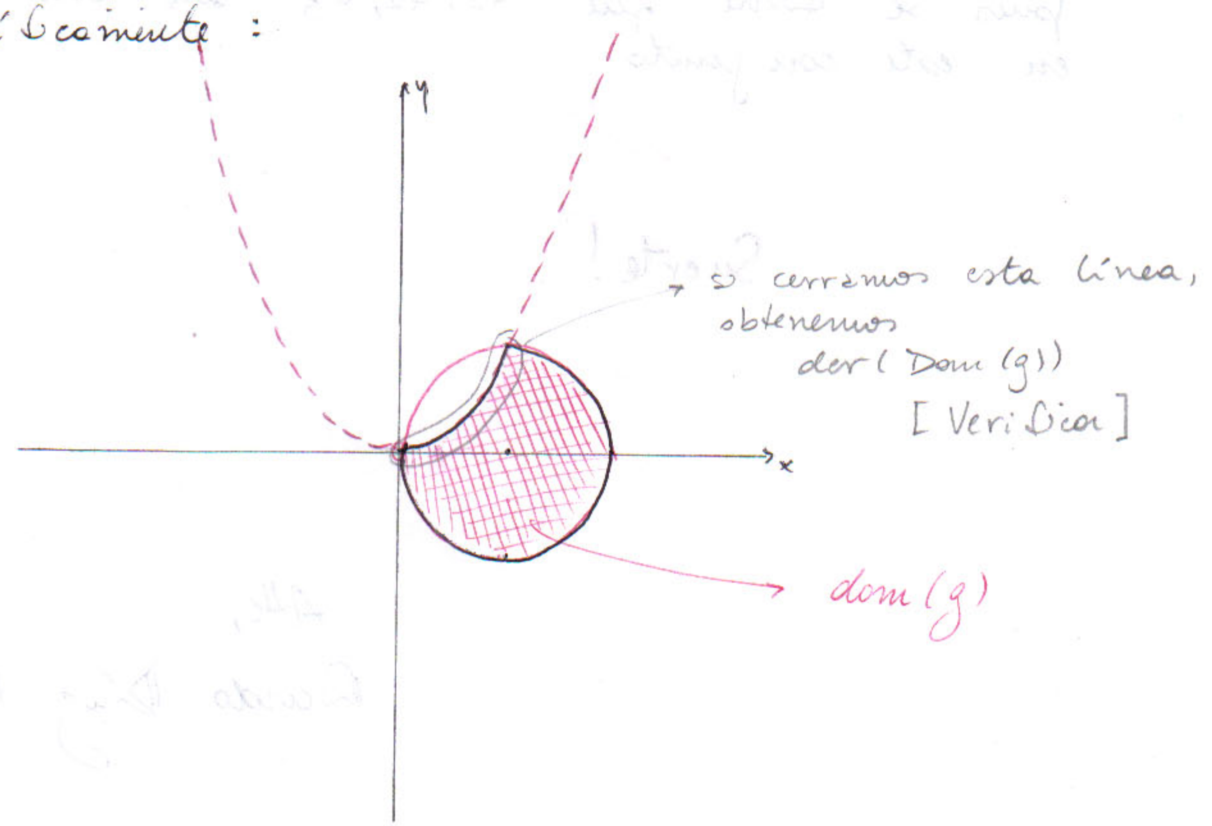
Encontrar $\text{Dom}(g)$, $\text{Der}(\text{Dom}(g))$ y analizar continuidad.

Sol. De las preguntas anteriores, conocemos los dominios de $f_i(x,y)$. Luego:

$$\text{Dom}(g) = \text{Dom}(f_1) \cap \text{Dom}(f_2) \cap \text{Dom}(f_3)$$

$$= \mathbb{R}^2 \cap \Omega \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \geq y\}$$

Gráficamente:



Por otro lado, si queremos analizar la continuidad de g, debemos recordar que

g es continua $\Longleftrightarrow$ Las fns. componentes de g son continuas.

Haciendo uso de los resultados de las preguntas anteriores, se tiene

① g NO es continua en $\{(x,y) \mid x^2 = y\} \cap \mathrm{Dom}(g)$ pues f_3 no es continua en estos puntos (f_1 y f_2 sí lo son, pero no es suficiente)

② g SI es continua en $\mathrm{Dom}(g) \setminus \{(x,y) \mid x^2 = y\}$, pues se tiene que f_1, f_2, f_3 son continuas en este conjunto

Suerte!

Atte,

Ricardo Díaz Riadi