

Pauta Problema 3, Control 2

MA22A, Prof. Pierre Guiraud

Abril 2006

1. Consideramos en lo que sigue $f(x) = \operatorname{sen}^2(x+y) + x^2y$

i) Calculamos derivadas parciales de 1er orden de f . Claramente f es \mathcal{C}^1 por algebra de funciones \mathcal{C}^1

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2\operatorname{sen}(x+y)\cos(x+y) + 2xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2\operatorname{sen}(x+y)\cos(x+y) + x^2$$

Las cuales son \mathcal{C}^1 por algebra de funciones \mathcal{C}^1 . Con esto, f es \mathcal{C}^2 . Calculemos ahora derivadas parciales de 2do orden. Como f es \mathcal{C}^2 , usamos teo. de Schwarz:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2(\cos^2(x+y) - \operatorname{sen}^2(x+y)) + 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2(\cos^2(x+y) - \operatorname{sen}^2(x+y))$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2(\cos^2(x+y) - \operatorname{sen}^2(x+y)) + 2x$$

Entonces, al evaluar en $(0,0)$ se obtiene:

$$\nabla f(0,0) = (0,0)$$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Como f es \mathcal{C}^2 , podemos escribir su polinomio de Taylor:

$$T_2^f(h_1, h_2) = (h_1 + h_2)^2$$

ii) Calculamos derivadas de 3er orden. Se tiene que f es \mathcal{C}^3 , pues las derivadas de 2do orden son \mathcal{C}^1 , por algebra de funciones \mathcal{C}^1

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = -8\cos(x+y)\sin(x+y)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = -8\cos(x+y)\sin(x+y)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = -8\cos(x+y)\sin(x+y) + 2$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = -8\cos(x+y)\sin(x+y)$$

Por ser f funcion \mathcal{C}^3 y usando teo. de Schwarz, las derivadas cruzadas son iguales, esto es, por ejemplo:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}$$

Ahora, buscamos probar la desigualdad. Por definicion, lo que se pide es acotar el resto.

$$h_i \leq \|h\| \quad i \in \{1, 2\}$$

$$R_2(0, h) \leq \frac{\|h\|^3}{3!} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \left| \frac{\partial^3 f(t_{ijk}h)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \right|$$

Ademas, podemos usar las siguientes cotas:

$$\|\cos(\cdot)\| \leq 1$$

$$\|\sin(\cdot)\| \leq 1$$

$$\|\partial_{xxx} f\| \leq 8$$

$$\|\partial_{yyy} f\| \leq 8$$

$$\|\partial_{xxy} f\| \leq 10$$

$$\|\partial_{yyx} f\| \leq 8$$

Entonces

$$R_2(0, h) \leq \frac{\|h\|^3}{3!} (8 + 8 + 3 \cdot 10 + 3 \cdot 8) \leq \frac{70\|h\|^3}{3!} \leq \frac{40\|h\|^3}{3}$$

iii) Sea $F = x^3 + y^3 + z^3 - xyz$

Por definicion, la superficie pedida corresponde a N_0 de F , la curva de nivel asociada al valor 0.

Luego de verificar que el punto $(0, 1, -1)$ efectivamente pertenece a la superficie, basta notar que tomando $\nabla F(0, 1, -1)$ se obtendra un vector normal, pues la superficie corresponde a una curva de nivel.

Calculemos entonces $\nabla F(0, 1, -1)$:

$$\nabla F(0, 1, -1) \Big|_{(0,1,-1)} = \begin{pmatrix} 3x^2 - yz \\ 3y^2 - xz \\ 3z^2 - xy \end{pmatrix} \Big|_{(0,1,-1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Asi, ya que se tiene el vector normal a la superficie, y no es nulo, calculamos el plano tangente, dado por la ecuacion:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x - 0 \\ y - 1 \\ z + 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow x + 3y + 3z = 0$$

Atte.

Ricardo Diaz Riadi

•