

Pauta Problema 2, Control 1

MA22A, Prof. Pierre Guiraud

Julio 2006

1.

i) Sean $x_p, x_q \in \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

$$\begin{aligned}\|g(x_p) - g(x_q)\| &= \|f(x_p) + x_p - f(x_q) - x_q\| \\ &= \|x_p - x_q - (f(x_q) - f(x_p))\| \\ &\geq \|x_p - x_q\| - \|(f(x_q) - f(x_p))\| \\ &\geq \|x_p - x_q\| - k\|x_p - x_q\| \\ &\geq (1 - k)\|x_p - x_q\|\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|x_p - x_q\| \leq \frac{1}{1 - k} \|g(x_p) - g(x_q)\|$$

ii) Si $x_q \in \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ converge, entonces es sucecion de Cauchy, luego $\forall \epsilon \geq 0 \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\forall k, l \geq n_\epsilon$

$$\|g(x_k) - g(x_l)\| \leq \epsilon$$

Luego, si tomamos $\epsilon^* = \epsilon(1 - k)$, $\exists n_\epsilon^*$ tal que $\forall p, q \geq n_\epsilon^*$

$$\|x_p - x_q\| \leq \frac{1}{1 - k} \|g(x_p) - g(x_q)\| \leq \frac{\epsilon^*}{1 - k} \leq \epsilon$$

Entonces, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en Espacio de Banach (\mathbb{R}^n)

$$\Rightarrow \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge}$$

Y como C es cerrado, $x_n \rightarrow x \in C$

iii) Sea $\{g(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ sucecion en la imagen de g convergente. Basta probar que converge a un punto dentro de la imagen de g

Pero de la parte anterior, sabemos que si $\{g(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge, entonces tambien lo hace $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en C , y como f es continua, y consideramos $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $H(x) = x$, tambien continua, entonces por algebra de fns. continuas, la funcion $g(x) = f(x) + H(x)$ es continua, es decir:

$$\begin{aligned} \lim g(x_n) = g(\lim x_n) &\Rightarrow g(x_n) \rightarrow g(x_0) \in \text{Im}(g) \\ &\Rightarrow \text{Im}(g) \text{ es cerrado} \end{aligned}$$

2.

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{si } x + y \leq 0, \\ \sqrt{x+y} + xy & \text{si no.} \end{cases}$$

Sean

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y > 0\}$$

$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y < 0\}$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$$

Sea $(x_0, y_0) \in D_1$, entonces

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f|_{D_1}(x, y) = x_0 + y_0$$

pues $f|_{D_1}(x, y)$ es continua. Asi, f es continua.

Sea $(x_0, y_0) \in D_2$ Considerando $f|_{D_2}$ se obtiene por el mismo procedimiento que f es continua de (x_0, y_0)

Sea $(x_0, y_0) \in D$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f|_{D_1}(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f|_{D_2}(x, y) \Leftrightarrow (x_0, y_0) = (0, 0)$$

$$\Rightarrow f \text{ no es continua en } D/\{(0, 0)\}$$

En $(0, 0)$ se cumple ademas que $0+0=0$. Luego, como $\{D_1, D_2, D\}$ forman particion finita del dominio, se tiene que f es continua en $(0, 0)$

•

(Dudas o errores? rdiaz@ing.uchile.cl)