Problema 1

Dado el sistema lineal

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
(2-\beta) & x_1 & + & (-1+\beta) & x_2 & + & 5\beta & x_3 & + & & x_4 & = & 0 \\
(-2+\beta) & x_1 & + & (2-2\beta) & x_2 & - & 5\beta & x_3 & - & & x_4 & = & 0 \\
(2-\beta) & x_1 & + & (-1+\beta) & x_2 & + & 1+4\beta & x_3 & + & 2 & x_4 & = & 0 \\
(-2+\beta) & x_1 & + & (1-\beta) & x_2 & - & 5\beta & x_3 & + & (-1+\beta) & x_4 & = & 0
\end{array}$$

Encuentre las condiciones sobre $\beta \in \mathbb{R}$ necesarias para que el sistema:

(i) tenga infinitas soluciones (encuentre el conjunto solución).
(ii) tenga solución única (encuentre esta solución).
(iii) No tenga solución.

Problema 2

Sean $a,b \in \mathbb{R}$. Considere el sistema lineal en las variables x_1, x_2, x_3, x_4 :

$$\begin{array}{rcrcrcrcl}
x_1 & + & 2\,x_2 & & & + & b\,x_4 & = & b \\
x_1 & + & (a+2)\,x_2 & + & 2\,x_3 & + & b\,x_4 & = & 2 \\
 & & 2a\,x_2 & + & 5\,x_3 & + & 2\,x_4 & = & 7 \\
-\,x_1 & - & 2\,x_2 & & & & & = & a
\end{array}$$

(i) Considere $a \neq 0$. Estudie la existencia de soluciones del sistema en función de los parámetros a y b. En caso de tener solución diga si es única.
(ii) Considere $a = 0$. Estudie bajo que condiciones el sistema tiene solución y explicite l conjunto solución.

Problema 3

Determine los valores de $a,b \in \mathbb{R}$ tales que el siguiente sistema de ecuaciones tenga solución:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl}
x_1 & + & 2\,x_2 & + & 3\,x_3 & + & 4\,x_4 & = & a \\
x_1 & + & 2\,x_2 & + & & + & 2\,x_4 & = & b \\
 & & 2\,x_2 & + & 2\,x_3 & + & 2\,x_4 & = & a \\
x_1 & & & & & + & x_4 & = & b \\
x_1 & + & 2\,x_2 & + & 3\,x_3 & + & 4\,x_4 & = & b+1
\end{array}$$

Problema 4

Sea $T : M_{2,3}(\mathbb{R}) \to M_{2,2}(\mathbb{R})$ tal que a $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ le asocia $\begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix}$

(i) Pruebe que T es una transformación lineal.
(ii) Determine bases del núcleo e imagen de T.
(iii) Determine si T es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.

Problema 5

Encuentre el determinante de las siguientes matrices y si es posible, inviértalas:

(i) $A=\begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ (ii) $B=\begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 4 & 2 \\ -1 & 7 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ (iii) $C=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 0 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

Problema 6

Sea $T: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 2x_5 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \\ x_1 + x_3 + 4x_4 + x_5 \end{pmatrix}$

Encuentre las bases de $\mathrm{Ker}(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$

Problema 7

Sea

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 4 & 2 \\ -1 & 7 & -3 & \alpha \end{bmatrix}$$

Determine para que valor(es) de α la matriz A es invertible.

Problema 8

Invierta "paso por paso" la siguiente matriz (método de Gauss):

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & 7 \\ 2 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

Utilizando la matriz encontrada resuelva: $Ax=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Problema 9

Sea el sistema lineal $Ax = b$ donde:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resuelve dicho sistema mediante Gauss, dejando explicito cada paso del procedimiento.

Problema 10

Obtenga la descomposición LU de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & 7 \\ 2 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

En base a la descomposición anterior resuelva $A \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Problema 11

Encuentre la descomposición LU de la siguiente matriz especificando las matrices elementales usadas.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Además, determine A^{-1}.