Inversión de matrices:

Dada la matriz A, donde $A \in M_{n\times n}$

Se define la matriz $\tilde{A}_{i,j}$ como la submatriz de A quitando la fila i y la columna j

por ejemplo si:

$$A = \begin{bmatrix} a & \cancel{b} & c \\ \cancel{d} & \cancel{e} & \cancel{f} \\ g & \cancel{h} & i \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{A}_{2,2} = \begin{bmatrix} a & c \\ g & i \end{bmatrix}$$

entonces la matriz A^{-1} se definirá de forma genérica como:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A'$$

donde los elementos de A' se definen como:

$$A'_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(\tilde{A}_{ji})$$

Veamos un par de ejemplos:

1. si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

   calculando el determinante $\Rightarrow \det(A) = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$

   luego los coeficientes:

   $A'_{1,1} = (-1)^{1+1} \cdot \det(\tilde{A}_{1,1}) = \det(4) = 4$

   $A'_{1,2} = (-1)^{1+2} \cdot \det(\tilde{A}_{2,1}) = -\det(2) = -2$

   $A'_{2,1} = (-1)^{2+1} \cdot \det(\tilde{A}_{1,2}) = -\det(3) = -3$

   $A'_{2,2} = (-1)^{2+2} \cdot \det(\tilde{A}_{2,2}) = \det(1) = 1$

   con lo que finalmente se tendrá:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A'$$

$$\Leftrightarrow A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

2. si $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

   calculando el determinante $\Rightarrow \det(B) = -1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 6$

luego los coeficientes:

$$B'_{1,1} = (-1)^{1+1} \cdot \det(\tilde{B}_{1,1}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$B'_{1,2} = (-1)^{1+2} \cdot \det(\tilde{B}_{2,1}) = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 6$$

$$B'_{1,3} = (-1)^{1+3} \cdot \det(\tilde{B}_{3,1}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$B'_{2,1} = (-1)^{2+1} \cdot \det(\tilde{B}_{1,2}) = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$B'_{2,2} = (-1)^{2+2} \cdot \det(\tilde{B}_{2,2}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

$$B'_{2,3} = (-1)^{2+3} \cdot \det(\tilde{B}_{3,2}) = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$B'_{3,1} = (-1)^{3+1} \cdot \det(\tilde{B}_{1,3}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$B'_{3,2} = (-1)^{3+2} \cdot \det(\tilde{B}_{2,3}) = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$B'_{3,3} = (-1)^{3+3} \cdot \det(\tilde{B}_{3,3}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

con lo que finalmente se tendrá:

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} \cdot B'$$

$$\Leftrightarrow B^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -2 & 6 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$