Pauta Control n°2
Álgebra lineal ma11b
29 de abril del 2004

Profesor: Jaime Michelow
Profesor Auxiliar: Andrés Felipe Hurtado del Nido

Tiempo: 2 horas

Problema 1

a) Sea $V = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$

i) Calcular una base ortonormal de V y calcular su dimensión.
ii) Calcular una base de $V^{\perp}$ (V ortogonal).

Solución:

i) Cálculo de una base ortonormal de V:
Primero se encuentran los vectores l.i. de este conjunto y luego aplicamos graham-schmidt (otra opción era aplicar el algoritmo directamente, igual de válida). Para encontrar los vectores l.i. se escalonan los vectores actuales (pueden mostrarlo de otra forma).

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -3 & 3 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Se encuentran entonces dos vectores l.i. a los cuales se les aplicará el algoritmo, los cuales son: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Por medio del algoritmo encontramos el primer vector ortogonal:

$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, a parir del cual encontramos el primer vector ortonormal.

$$\hat{w}_1 = \frac{\vec{w}_1}{\|\vec{w}_1\|} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Se encuentra luego el segundo vector ortogonal:

$$\bar{w}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix} + \frac{3}{4}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}3\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

luego, el segundo vector ortogonal:

$$\hat{w}_2 = \frac{\bar{w}_2}{\|\bar{w}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{12}}\begin{pmatrix}3\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

La base ortonormal de V es entonces: $\left\{ \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{12}}\begin{pmatrix}3\\1\\-1\\1\end{pmatrix} \right\}$

Luego, la dimensión de V será igual a la cardinalidad de su base $\Rightarrow$ dim(V) = 2

ii) Para calcular la base de $V^{\perp}$, se completa la base ortonormal de $|R^4$ aplicando el algoritmo a dos vectores l.i. a la base de V (se esta la ya encontrada o la inicial). De la base inicial vemos claramente que los vectores l.i. a agregar son:

$\left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$. Se aplica entonces el algoritmo:

$$\bar{w}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{12}}\begin{pmatrix}3\\1\\-1\\1\end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{12}}\begin{pmatrix}3\\1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} + \frac{1}{12}\begin{pmatrix}3\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\bar{w}_3 = \frac{1}{12}\begin{pmatrix}0\\0\\12\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{12}\begin{pmatrix}3\\-3\\3\\-3\end{pmatrix} + \frac{1}{12}\begin{pmatrix}3\\1\\-1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix}0\\4\\8\\4\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \hat{w}_3 = \frac{\bar{w}_3}{\|\bar{w}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$\bar{w}_4 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{12}}\begin{pmatrix}3\\1\\-1\\1\end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{12}}\begin{pmatrix}3\\1\\-1\\1\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$\vec{w}_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}-\frac{1}{12}\begin{pmatrix}3\\1\\-1\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\12\end{pmatrix}+\frac{1}{12}\begin{pmatrix}3\\-3\\3\\-3\end{pmatrix}+\frac{1}{12}\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}+\frac{1}{12}\begin{pmatrix}0\\-2\\-4\\-2\end{pmatrix}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}0\\-6\\0\\6\end{pmatrix}$$

$$\hat{w}_4=\frac{\vec{w}_4}{\|\vec{w}_4\|}=\frac{1}{6\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-6\\0\\6\end{pmatrix}$$

Se encuentra entonces que la base de $V^{\perp}$ es: $\left\{\frac{1}{6\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-6\\0\\6\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$

b) Sea M una matriz triangular superior de dimensión *nxn* cuya diagonal es estrictamente positiva. Sean $v_1, v_2, \ldots, v_n$ los distintos vectores columnas de M ordenados de la primera a la última columna. Probar por recurrencia que al aplicar el algoritmo de Gram-Schmidt a la base $\{v_1, \ldots., v_n\}$ se obtiene como resultado la base canónica $\{e_1, \ldots., e_n\}$

<u>Solución:</u>

Se tiene la matriz triangular superior:

$$\begin{bmatrix}v_{1,1} & v_{1,2} & v_{1,3} & \ldots & v_{1,n}\\ 0 & v_{2,2} & v_{2,3} & \ldots & v_{2,n}\\ 0 & 0 & v_{3,3} & \ldots & v_{3,n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & v_{n,n}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 & \ldots & \vec{v}_n\end{bmatrix}$$

como la matriz es triangular superior, ssi ya está escalonada, sii sus vectores son l.i. entonces, aplicamos el algoritmo directamente:

$$\vec{w}_1=\vec{v}_1=\begin{pmatrix}v_{1,1}\\0\\\ldots\\0\end{pmatrix}\qquad\Rightarrow\hat{w}_1=\frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|}=\frac{1}{v_{1,1}}\begin{pmatrix}v_{1,1}\\0\\\ldots\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\\ldots\\0\end{pmatrix}=e_1$$

$$\vec{w}_2=\vec{v}_2-\left\langle\begin{pmatrix}v_{1,2}\\v_{2,2}\\0\\\ldots\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v_{1,2}\\v_{2,2}\\0\\\ldots\end{pmatrix}-v_{1,2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\ldots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\v_{2,2}\\0\\\ldots\end{pmatrix}\Rightarrow\hat{w}_2=\frac{\vec{w}_2}{\|\vec{w}_2\|}=\frac{1}{v_{2,2}}\begin{pmatrix}v_{2,2}\\0\\\ldots\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\ldots\end{pmatrix}=e_2$$

luego, se puede ver claramente por recurrencia que para el caso del vector p, se tendrá:

$$\vec{w}_p = \vec{v}_p - \left\langle \begin{pmatrix} v_{1,p} \\ \dots \\ v_{p-1,p} \\ v_{p,p} \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} v_{1,p} \\ v_{2,p} \\ \dots \\ v_{p,p} \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} - \dots - \left\langle \begin{pmatrix} v_{1,p} \\ \dots \\ v_{p-1,p} \\ v_{p,p} \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad \vec{w}_p = \vec{v}_p - v_{1,p}\begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} - v_{2,p}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} - \dots - v_{p-1,p}\begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ v_{p,p} \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{w}_p = \frac{1}{v_{p,p}}\begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ v_{p,p} \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix} = e_p$$

Entonces después de aplicar el algoritmo se tendrá la base: $\{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$, es decir, la base canónica.

Problema 2

a) Sobre parametrización:

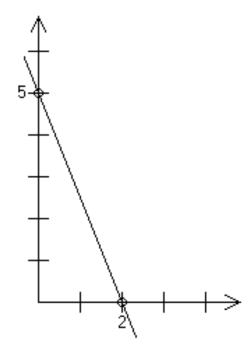
(i) Dados los puntos en |R^2 $A = (0,5)^t$ y $B = (2,3)^t$, encuentre:

a) La forma cartesiana de la recta que pasa por A y B.
b) La forma paramétrica de la recta.
c) La forma vectorial de la recta.

(ii) Dados los puntos en |R^3 $C = (0,0,1)^t$ y $D = (2,0,0)^t$, encuentre:

a) La forma paramétrica de la recta que pasa por C y D.
b) La forma vectorial de la recta.

<u>Solución:</u>



i) Dados lo puntos de |R^2 $A = (0,5)^t$ y $B = (2,3)^t$, se encuentran las formas de la recta:

Primero, la recta a parametrizar es: (no es necesario hacer el dibujo)

- $m = \dfrac{3-5}{2-0} = -1$ y $n = 1$

  $\Rightarrow y = -x + 5 \ \rightarrow \mathit{forma\ \ cartesiana}$
- Usando el parámetro **t**, determino el valor de "x" y luego se encuentra la forma:

  $\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = t \\ y = 5 - t \end{array}\right\} \rightarrow \mathit{forma\ \ paramétrica}$ (hay muchas formas de escribirla).
- $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 5-t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow \mathit{forma\ \ vectorial}$ (se puede escribir de variadas formas).

ii) Dados lo puntos de |R^3 $C=(0,0,1)^t$ y $D=(2,0,0)^t$, se encuentran las formas de la recta:

- Usando el parámetro **t**, determino el valor de "x" y luego se encuentra la forma:

$$\left.\begin{array}{r} x=t \\ y=ct+d \\ z=et+f \end{array}\right\} forma \;\; general$$

para encontrar las constantes se evalúa en cada punto:

$$en\ C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ y=c\cdot 0+d=0 \\ z=e\cdot 0+f=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} d=0 \\ f=1 \end{array} \qquad en\ D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=2 \\ y=c\cdot 2=0 \\ z=e\cdot 2+1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} c=0 \\ e=\dfrac{-1}{2} \end{array}$$

finalmente:

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=t \\ y=0 \\ z=\dfrac{-1}{2}t+1 \end{array}\right\} \rightarrow forma \;\; paramétrica$$ (hay muchas formas de escribirla).

- Usando lo anterior:

$$\vec{r}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ \dfrac{-1}{2}t+1 \end{pmatrix}=t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{-1}{2} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow forma \;\; vectorial$$ (se puede escribir de variadas formas).

b) Sean E y F e.v.'s sobre el mismo cuerpo |K. Se sabe que ExF es un e.v. con las leyes $(x,y)+(u,v)=(x+u,y+v)$ y $\alpha(x,y)=(\alpha x,\alpha y)$.

(i) Probar que Ex{0_F} y {0_E}xF son suma directa de ExF.

(ii) Sea {$e_1,e_2,...,e_n$} una base de E y {$f_1,f_2,...,f_m$} una base de F. Determinar una base de ExF.

i) Para demostrar que estos dos espacios corresponden a una suma directa de $E\times F$, es necesario demostrar:

1. $E\times\{0_F\}\cap\{0_E\}\times F=0$.
2. $\forall u\in E\times F, \exists v\in E\times\{0_F\}\wedge \exists w\in\{0_E\}\times F, tal\ que\ u=v+w$

demostración:

1. Para ver la intersección se toma un elemento que pertenezca a ambos espacios y aplicando las propiedades de c/u, se determina su valor:

sea $u\in E\times\{0_F\}\cap\{0_E\}\times F \Leftrightarrow u\in E\times\{0_F\}\wedge u\in\{0_E\}\times F$

como $u\in E\times\{0_F\}$ $\Rightarrow u$ es de la forma: $(u_E,0_F)$

como $u\in\{0_E\}\times F$ $\Rightarrow u$ es de la forma: $(0_E,u_F)$

$$\Rightarrow\begin{cases} u_E=0_E \\ u_F=0_F \end{cases} \qquad \Rightarrow u=(0_E,0_F)$$

luego, como el cero de $E\times F$ es $(0_E,0_F)$

$$\Rightarrow\ E\times\{0_F\}\cap\{0_E\}\times F=\vec{0}$$

2. Se demuestra luego que todo elemento de $E \times F$, es una composición de un elemento de $E \times \{0_F\}$ y otro de $\{0_E\} \times F$.

Sea $u \in E \times F \rightarrow u = (u_E, u_F)$.

Sea $v \in E \times \{0_F\} \rightarrow v = (v_E, 0_F)$ y sea $w \in \{0_E\} \times F \rightarrow w = (0_E, w_F)$

$\Rightarrow v + w = u \Leftrightarrow (v_E, 0_F) + (0_E, w_F) = (u_E, u_F)$

$\Leftrightarrow (v_E + 0_E, 0_F + w_F) = (u_E, u_F)$ (usando la operación entregada en un principio)

$$\Leftrightarrow (v_E, w_F) = (u_E, u_F) \Rightarrow \begin{cases} v_E = u_E \\ w_F = u_F \end{cases}$$

$$\Rightarrow \exists \begin{cases} v = (u_E, 0_F) \\ w = (0_E, u_F) \end{cases} \qquad \forall u \in E \times F$$

$\therefore$ son suma directa.

ii) Primero, para el espacio $E \times \{0_F\}$, como $\{e_i\}_1^n$ es base de E, $\Rightarrow \{(e_i, 0_F)\}_1^n$ es base de $E \times \{0_F\}$,

pero esto hay que demostrarlo: hay que mostrar entonces $\begin{cases} a)\ \{(e_i, 0_F)\}_1^n \ son\ l.i. \\ b)\ \forall u \in E \times \{0_F\} \exists \alpha_i \rightarrow \sum \alpha_i (e_i, 0_F) = u \end{cases}$

a) para ver que son l.i. debe cumplir que: $\sum \alpha_i (e_i, 0_F) = 0 \Leftrightarrow \alpha_i = 0\ \forall i$

se ve entonces que (usando la ley de operación entregada):

$\sum \alpha_i (e_i, 0_F) = (0_E, 0_F) \Leftrightarrow (\sum \alpha_i \cdot e_i, \sum \alpha_i \cdot 0_F) = (0_E, 0_F)$

$\Leftrightarrow (\sum \alpha_i \cdot e_i, 0_F) = (0_E, 0_F) \Leftrightarrow \sum \alpha_i \cdot e_i = 0$ pero se sabe que $\{e_i\}_1^n$ es base de E

$\Leftrightarrow \alpha_i = 0\ \forall i \quad \Rightarrow \{(e_i, 0_F)\}_1^n \ son\ l.i$

b) luego se ve que cualquier elemento de $E \times \{0_F\}$ es generado por la base, es decir:

si $u \in E \times \{0_F\} \exists \alpha_i \rightarrow \sum \alpha_i (e_i, 0_F) = u = (u_E, 0_F)$

$\Leftrightarrow (\sum \alpha_i \cdot e_i, 0_F) = (u_E, 0_F) \Leftrightarrow \sum \alpha_i \cdot e_i = u_E$

pero como $u_E \in E$ y $\{e_i\}_1^n$ es base de E $\Rightarrow \exists \alpha_i \rightarrow \sum \alpha_i e_i = u_E \Leftrightarrow \exists \alpha_i \rightarrow \sum \alpha_i (e_i, 0_F) = u$

$\therefore$ $\{(e_i, 0_F)\}_1^n$ es base de $E \times \{0_F\}$.

A continuación, por una clara analogía $\Rightarrow \{(0_E, f_i)\}_1^m$ es base de $\{0_E\} \times F$.

Finalmente, como tenemos la base de ambos subespacios y como estos son suma directa $\Rightarrow$ la base de $E \times F$ es la unión de ambas bases:

$$\therefore \quad \{(e_i, 0_F)\}_1^n \cup \{(0_E, f_i)\}_1^m \text{ es base de } E \times F$$

(Otra forma de hacer este problema era proponer directamente la base de $E \times F$ y demostrar que en realidad lo era).

Problema 3

Demuestre que la multiplicación entre dos matrices triangulares superiores da como resultado una matriz triangular superior.

Solución:

Para hacer este problema hay principalmente dos formas:

1. Por bloques:

Se definen dos matrices diagonales X e Y. Para poder multiplicar ambas matrices, se dividen en bloques, de la siguiente forma:

$X = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} D & E \\ 0 & F \end{bmatrix}$ El bloque inferior izquierdo son sólo ceros, dado que las matrices son triangulares superiores. Multiplicando entonces queda:

$$X \cdot Y = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D & E \\ 0 & F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \cdot D & A \cdot E + B \cdot F \\ 0 & F \cdot C \end{bmatrix}$$

Se ve entonces que en cuanto a bloques, el resultado cumple con la forma de una matriz triangular superior, pero hay que ver todavía que pasa con las matrices $A \cdot D$ y $F \cdot C$. Pero se ve claramente por la forma en que se descompusieron X e Y que A, D, F, C deben ser matrices cuadradas y triangulares superiores y se vuelve entonces al mismo problema, es decir, demostrar que la multiplicación de 2 matrices triangulares superiores da como resultado una matriz triangular superior. Para demostrar aquello, se vuelven a dividir la submatrices en bloques y el desarrollo es análogo. Lo anterior se repetirá recursivamente hasta llegar al caso básico, es decir, submatrices tan pequeñas que no se puedan separar en bloques para multiplicar, pero esto se dará sólo en el caso de que sus dimensiones sean de 2x2 (claramente cualquier tamaño superior se puede llevar a bloques) y en ese caso se encontraran las matrices de forma genérica Ψ y Ω, donde:

$$\Psi = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{bmatrix} \text{ y } \Omega = \begin{bmatrix} \theta & \phi \\ 0 & \xi \end{bmatrix} \Rightarrow \Psi \cdot \Omega = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta & \phi \\ 0 & \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\theta & \alpha\phi + \beta\xi \\ 0 & \gamma\xi \end{bmatrix}$$

Donde se ve que el resultado de esto es una matriz triangular superior $\Leftrightarrow$ todas las submatrices usadas son triangulares superiores $\Leftrightarrow$ $X \cdot Y$ es triangular superior.

$\therefore$ La multiplicación de dos matrices triangulares superiores da como resultado una matriz triangular superior.

2. Usando la definición de multiplicación:

Si A es triangular superior (y lo mismo para B), con $A, B \in M_{nxn}$ (|R)

$$\Rightarrow a_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & si \;\; i \leq j \\ 0 & j < i \end{cases}$$ (lo mismo para B)

si se tiene entonces $C = A \cdot B$

$$\Rightarrow C_{ij} = (A \cdot B)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

veamos ahora en que caso un coeficiente será siempre cero

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} = 0 \Leftrightarrow a_{ik} = 0 \vee b_{kj} = 0 \text{ pero } \begin{cases} a_{ik} = 0 \Leftrightarrow i > k \\ b_{kj} = 0 \Leftrightarrow k > j \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a_{ik} \neq 0 \Leftrightarrow i \leq k \\ b_{kj} \neq 0 \Leftrightarrow k \leq j \end{matrix}$$

se tendrá entonces que la sumatoria (ie, el coeficiente C_{ij}) será distinto a cero

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} i \leq k \\ k \leq j \end{matrix} \Leftrightarrow i \leq j \Leftrightarrow \text{el coeficiente esta en la diagonal o sobre ella.}$$

Se ve luego en que caso el coeficiente será siempre distinto de cero.

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} \neq 0 \Leftrightarrow a_{ik} \neq 0 \wedge b_{kj} \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a_{ik} \neq 0 \Leftrightarrow i \leq k \\ b_{kj} \neq 0 \Leftrightarrow k \leq j \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} \neq 0 \Leftrightarrow i \leq j$$

pero bajo la diagonal se tiene que $j < i \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} = 0$

Finalmente se encontró:

$$c_{ij} = \begin{cases} \sum_{i}^{j} a_{ik} b_{kj} & i \leq j \\ 0 & j < i \end{cases}$$

$\therefore C$ es una matriz triangular superior, ie, la multiplicación de dos matrices triangulares superiores da como resultado un matriz triangular superior.