Pauta Control n°1

Álgebra lineal ma11b

2 de abril del 2004

Profesor: Jaime Michelow
Profesor Auxiliar: Andrés Felipe Hurtado del Nido

Tiempo: 2 horas

Problema 1 (complejos)

(i) Sea $m \in$ |N y sean $w_0,...,w_{n-1}$ las raíces *n*-ésimas de la unidad.

Verifique que

$$\frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1} w_l^m = \begin{cases} 1 & si \text{ 'n' } divide\ a \text{ 'm'} \\ 0 & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

<u>Hint:</u> $\sum_{k=0}^{m} r^k = \frac{1-r^{m+1}}{1-r}$ si $r \neq 1$

<u>Solución:</u>

si $w_0,...,w_{n-1}$ son las raíces *n*-ésimas de la unidad, entonces serán de la forma: $w_k = e^{i(\frac{2pk}{n})}$. Revisando por casos:

a) *n* divide a *m*:

$\Rightarrow m = pn$, con p $\in$ |N, entonces:

$$w_l^m = w_l^{pn} = e^{i(\frac{2pk}{n})pn} = e^{i(2pk)p} = 1^p = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1} 1 = \frac{1}{n} * n = 1$$

b) otros casos:

$$w_k^p = e^{i(\frac{2pk}{n})m} = e^{i(2pk)m\frac{1}{n}} = 1^{m\frac{1}{n}} = 1^{\frac{1}{n}} = e^{i(\frac{2pk}{n})}$$

usando ahora la indicación:

$$\Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1} e^{i(\frac{2pk}{n})} = \frac{1}{n} * \frac{1-e^{i(\frac{2pk}{n})^n}}{1-e^{i(\frac{2pk}{n})}} = \frac{1}{n} * \frac{1-1}{1-e^{i(\frac{2pk}{n})}} = 0$$

(ii) Expresar en la forma $a+ib$ el complejo $\frac{(1-i)^{17}}{1+i^{17}}$

<u>Solución:</u> (ojo: pueden haber varias formas de hacer este problema)

$i^{17} = i^4 * i^4 * i^4 * i^4 * i = i$ vemos primero el valor de i^{17}, con lo que el complejo queda:

$\frac{(1-i)^{17}}{1+i}$ racionalizando luego $\Rightarrow \frac{(1-i)^{17}}{1+i} * \frac{1-i}{1-i} = \frac{(1-i)^{18}}{2}$, se pasa luego a polares

$$\frac{(1-i)^{18}}{2}=\frac{\sqrt{2}^{18}e^{-\frac{p}{4}18}}{2}=\frac{2^9e^{-\frac{9p}{2}}}{2}=2^8e^{-\frac{p}{2}}=-2^8i$$

Problema 2 (E.V. y s.e.v)

Sean E y F e.v.'s sobre un cuerpo |K tales que dim E = n y dim F = m. Sea T: E→F talque $T(0_E)=0_F$, $T(\alpha x)=\alpha T(x)$ para todo $x \in E$ y $\alpha \in$ |K, y T(x+y)=T(x)+T(y) para todo $x,y \in E$. Se define Im(T)=T(E)={$y \in F$ / y = T(x), $x \in E$}.
(i) Mostrar que T(E) es un s.e.v de F.

<u>Solución:</u> Las condiciones que T(E) debe cumplir son:

a) $T(E) \neq f$: Aquí sólo basta mostrar un elemento. Luego, como E es E.V. $\Rightarrow \exists\, 0_E$, donde $T(0_E)=0_F$ también existe porque F también es E.V. $\Rightarrow 0_F \in T(E) \Rightarrow T(E) \neq f$.
b) $T(E) \subset F$: Esto se ve claramente por definición, T(E)={$y \in F$ / y = T(x), $x \in E$}, lo que significa que todo elemento de T(E) pertenece a F $\Rightarrow T(E) \subset F$.
c) Dados $\alpha,\beta \in$ |R y dados T(a), T(b) $\in$ T(E), pdq: $\alpha T(a) + \beta T(b) \in T(E)$.
Usando las propiedades de la función entregadas anteriormente tenemos que:
$\alpha T(a) + \beta T(b) = T(\alpha a) + T(\beta b) = T(\alpha a + \beta b)$, ahora como E es E.V. $\Rightarrow \alpha a + \beta b \in E$
y finalmente por definición dada en el enunciado:
como $y = T(\alpha a + \beta b) \in F$ y $\alpha a + \beta b \in E \Rightarrow T(\alpha a + \beta b) \in T(E)$.

Tenemos entonces que T(E) es s.e.v de F.

(ii) Sea $n \leq m$ y supongamos además que T satisface que si T(x)=0 entonces x=0. Muestre que si $\{u_1, ..., u_n\}$ es una base de E, entonces $\{v_1, ..., v_n\}$ es una base de T(E), donde $v_i=T(u_i)$ para todo i = 1, .., n

<u>Solución:</u> Para ver que algo es base se debe comprobar que:

a) $\{v_i\}_1^n$ es l.i. :

este conjunto será l.i. $\Leftrightarrow \sum_1^n a_i v_i = 0 \Leftrightarrow a_i = 0, \forall i$

entonces dado $0 \in F$ (porque F es E.V), talque $0=\sum_1^n a_i v_i = \sum_1^n a_i T(u_i) = T\left(\sum_1^n a_i u_i\right)$ esto, usando definiciones y propiedades dadas. Pero además sabemos que $0 = T(x) \Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow \sum_1^n a_i u_i = 0$, sin embargo se sabe por dato que $\{u_i\}_1^n$ es l.i. $\Leftrightarrow a_i = 0 \Leftrightarrow \{v_i\}_1^n$ es l.i..

b) $\forall$ T(e) $\in$ T(E) con T(E) un E.V. $\exists$ $\{a_i\}_1^n \in$ |K talque $\sum_1^n a_i v_i$ =T(e) :

veamos que $\sum_1^n a_i v_i$ =T(e) $\Leftrightarrow$ T(e) = $\sum_1^n a_i T(u_i) = T\left(\sum_1^n a_i u_i\right)$

y esto $\Leftrightarrow e = \sum_1^n a_i u_i$, entonces como T(e) $\in$ T(E), por definición $e \in E$; por último como $\{u_i\}_1^n$ es base de T(E) , siempre exis tirán $\{a_i\}_1^n$ talque $e = \sum_1^n a_i u_i \Leftrightarrow \sum_1^n a_i v_i$ =T(e)

Problema 3 (dependencia e independencia lineal)

(i) Sean a, b y c vectores l.i. . Determine si {a+b, b+c, c+a} es necesariamente un conjunto linealmente independiente.

<u>Solución:</u> Hay muchas maneras de probar lo pedido, las dos más fáciles son:

Primera forma: escalonemos estos vectores para ver si existe independencia lineal:

$$\begin{bmatrix} a^t+b^t \\ b^t+c^t \\ c^t+a^t \end{bmatrix} \xrightarrow{①-②-③} \begin{bmatrix} -2c^t \\ b^t+c^t \\ c^t+a^t \end{bmatrix} \xrightarrow{①/-2} \begin{bmatrix} c^t \\ b^t+c^t \\ c^t+a^t \end{bmatrix} \xrightarrow{②-① \text{ y } ③-①} \begin{bmatrix} c^t \\ b^t \\ a^t \end{bmatrix}$$

La notación v^t se refiere a que trabajamos con matrices compuestas por vectores fila (es sólo cosa de notación). La matriz a la cual llegamos es la compuesta por los vectores iniciales, conocidos como l.i. $\Leftrightarrow$ {a+b, b+c, c+a} son l.i.

Segunda forma: sabemos que un conjunto de elementos será l.i. ssi:

$$\alpha(a+b) + \beta(b+c) + \gamma(c+a) = 0 \Leftrightarrow \alpha a + \alpha b + \beta b + \beta c + \gamma c + \gamma a = 0 \Leftrightarrow a(\alpha+\gamma) + b(\alpha+\beta) + c(\beta+\gamma) = 0$$

pero sabemos que a, b, c son l.i., entonces: $(\alpha+\gamma) = (\alpha+\beta) = (\beta+\gamma) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0 \Leftrightarrow$ {a+b, b+c, c+a} son l.i.

(ii) Determine $\alpha, \beta \in$ |R de modo que $(1,2,\alpha,1)^t$,$(\alpha,1,2,3)$t y $(0,1,\beta,0)^t$ sean linealmente independientes.

<u>Solución:</u> Para ver la independencia lineal, veremos el escalonamiento de la matriz formada por los vectores fila

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \beta & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & \alpha & 1 \\ 0 & 1-2\alpha & 2-\alpha^2 & 3-\alpha \\ 0 & 1 & \beta & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \beta & 0 \\ 0 & 1-2\alpha & 2-\alpha^2 & 3-\alpha \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 2-\alpha^2-\beta(1-2\alpha) & 3-\alpha \end{bmatrix}$$

Sabemos que los vectores serán independientes entre sí, siempre y cuando sean todos distintos de cero después del escalonamiento. Para el primer y segundo vector, siempre serán distintos de cero no importando los valores de α,β; sin embargo el valor del tercer vector depende completamente de los valores de los escalares.

De la última componente se ve claramente que $\alpha \neq 3$ y de allí aplicando esto en la segunda ecuación:

$$2-(3)^2-\beta(1-2(3)) = -7+5\beta \neq 0 \Rightarrow \beta \neq \frac{7}{5}.$$

Finalmente para que se de la independencia lineal es necesario que: $\alpha \neq 3$ y $\beta \neq \frac{7}{5}$ (cuando $\alpha=3$)

(iii) Sean $u_1, u_2, \ldots, u_k$ vectores linealmente independientes. Pruebe que para todo α escalar, los vectores $u_1+\alpha u_2, u_2, u_3, \ldots, u_k$ son linealmente independientes.

<u>Solución:</u> nuevamente escalonando:

$$\begin{bmatrix} u_1^t+\alpha u_2^t \\ u_2^t \\ \ldots \\ \ldots \\ u_k^t \end{bmatrix} \xrightarrow{①-\alpha②} \begin{bmatrix} u_1^t \\ u_2^t \\ \ldots \\ \ldots \\ u_k^t \end{bmatrix}$$

De aquí, claramente como $\{u_i\}_1^k$ son l.i. $\Leftrightarrow$ los vectores $u_1+\alpha u_2, u_2, u_3, \ldots, u_k$ son l.i.

(iv) Pruebe que el siguiente conjunto de polinomios reales son linealmente independientes

$$\{1, (x-1), (x-1) \bullet (x-2), (x-1) \bullet (x-2) \bullet (x-3), (x-1) \bullet (x-2)\bullet ..... \bullet(x-k)\}.$$

<u>Solución:</u> Claramente los polinomios que se formarán de aquí, serán: { 1 ; $-1+x$; $2-3x+x^2$; ....; $a_0+a_1x+...+a_{k-1}x^{k-1}+x^k$ }

De los polinomios anteriores, se puede ver además que el 'x' con el mayor exponente en cada caso, estará acompañado por una constante igual a uno. Así para probar independencia lineal, llevaremos estos polinomios a una forma vectorial para su mejor tratamiento. Entonces, el conjunto de polinomios anterior, se verá como el conjunto de polinomios siguiente:

$$\left\{\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ... \quad \begin{pmatrix} a_0' \\ a_1' \\ a_2' \\ ... \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ ... \\ a_{k-1} \\ 1 \end{pmatrix}\right]\right\}$$

Este conjunto ya esta escalonado (y con unos en la diagonal), por lo que solo bastará aplicar la condición para la linealidad:

$$l_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + l_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + ... + l_{k-1}\begin{pmatrix} a_0' \\ a_1' \\ a_2' \\ ... \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + l_k\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ ... \\ a_{k-1} \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

de donde claramente se ve que: $l_1 = l_2 = l_3 = ... = l_{k-1} = l_k = 0$ y por lo tanto el conjunto de polinomios reales es l.i.