Guía para el control n°1 ma11b   profesor auxiliar: Andrés Felipe Hurtado del Nido

Números complejos y raíces complejas:

Problema 1

Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ fijo.

(a) Demuestre que la suma de las raíces n-ésimas de la unidad es igual a cero.

(b) Demuestre que las raíces n-ésimas de un número complejo cualquiera $Z \in \mathbb{C}$, son el producto se una raíz particular $z_0 \in \mathbb{C}$ por una raíz n-ésima de la unidad.

(c) Concluya que la suma de las raíces n-ésimas de un complejo cualquiera, es igual a cero.

Problema 2

Sea α una raíz séptima de la unidad distinta de 1. Pruebe que :

(a) $1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^6 = 0$.

(b) $\frac{\alpha}{1+\alpha^2} + \frac{\alpha^2}{1+\alpha^4} + \frac{\alpha^3}{1+\alpha^6} = -2$.

Problema 3

(a) Calcule las raíces de $z^2 = -i$ y exprésela de la forma $a + bi$.

(b) Si $z + \dfrac{1}{z} = 2\cos(\alpha)$, calcule los posibles valores de $z \in \mathbb{C}$ y muestre que

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos(n\alpha).$$

(c) Pruebe que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $(1-i)^n + (1+i)^n \in \mathbb{R}$.

Problema 4

(a) Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| \neq 1$ y considere $n \geq 1$. Probar que

$$\frac{1}{1+z^n} + \frac{1}{1+(\bar{z})^n},$$

(donde $\bar{z}$ es el conjugado de z) es un número real.

(b) Exprese en forma $a + bi$ las raíces cuartas de $z_0 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$ (es decir, resuelva $z^4 = z_0$)

(c) Sean z_1 y z_2 complejos tales que $|z_1| = |z_2| = 1$. Pruebe que $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ si y sólo sí $z_1 = z_2$. (Indicación: Pruebe que $|z| = 1$ y $Re(z) = 1$ si y sólo sí $z = 1$.)

Problema 5

Sabiendo que la ecuación $z^3 - 9z^2 + 33z = 65$ admite una solución en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ de módulo $\sqrt{13}$, determinar todas las soluciones (en $\mathbb{C}$) de la ecuación.

Espacios vectoriales y sub espacios vectoriales:

Problema 6

Decidir cual o cuales de las estructuras siguientes son e.v.'s:

(i) $|R^2$ con la suma usual y la ponderación por $\alpha \in |R$, $\alpha(a,b)=(\alpha a,b)$.

(ii) $|R^2$ con la suma usual y la ponderación por $\alpha \in |R$, $\alpha(a,b)=(\alpha a,0)$.

(iii) $|R^+$ con la "suma" x□y=x•y, y la ponderación por $\alpha \bullet x = x^\alpha$.

(iv) El conjunto de las funciones acotadas de [a,b] en |R, con la suma y ponderación usuales.

(v) El conjunto de las funciones *f*☺R→|R tales que *f*(-1)=*f*(1) con la suma y ponderación usuales.

Problema 7
Sea $|P_3(|R)$ el conjunto de polinomios de grado menor o igual a 3 con coeficientes reales.
Sean p_1 , p_2 , $p_3 \in |P_3(|R)$ tales que $p_1(x)=1+6x^2$, $p_2(x)=4x$, $p_3(x)=1+3x+5x^2$.
Demuestre que si $p \in |P_3(|R)$ es de grado menor o igual a 2, entonces está contenido en el s.e.v. generado por p_1 , p_2 , p3.

Problema 8
¿Cuál/es de el/los conjuntos siguiente/s son s.e.v. de los e.v.'s que se indican?
(i) $S=\{(x_1 , ..., x_n)^t \in |R^n / x_1=x_2=...=x_n\}$ de $|R^n$.
(ii) $S=\{(x_1 , x_2 , x_3)^t \in |R^3 / x_1+1=x_2+2=x_3+3\}$ de $|R^3$.
(iii) $S=\{(x_1 , ..., x_n)^t \in |R^n / x_1=x_3= x_5=...=0\}$ de $|R^n$.
(iv) S={f:[a,b] $\rightarrow$|R / f es continua en [a,b]} del espacio de las funciones acotadas de [a,b] en |R.
(v) $S=\{p\in|P(|R)/p(0)=1\}$ de |P(|R).

Problema 9
Sea $|R^n$ el conjunto de las sucesiones de valores reales. Sea F el subconjunto de R^n que contiene sucesiones con un número finito de términos distintos de ceros.
(i) Demuestre que F es un s.e.v. de $|R^n$ sobre |R.
(ii) Demuestre que el s.e.v. F es de dimensión finita, ie, que el cardinal de una de sus bases es finito. Encuentre una base y demuestre que lo es.

Problema 10
Determine el o los valores de α para que el vector $(1,2,3\alpha,\alpha)^t$ esté contenido en el subespacio generado por $\{(1,2,2,1)^t,(5,10,14,3)^t,(2,10,-2,5)^t,(5,4,32,-6)^t\}$.

<u>Dependencia e independencia lineal:</u>

Problema 11
Determine la dependencia o independencia lineal de cada uno de los siguientes conjuntos vectores:
(i) $\{(-3,1,0)^t,(4,6,-5)^t,(-7,-5,5)^t \} \subseteq |R^3$.
(ii) $\{ x^2+1 , x^2-1 , x^2+x+1 \} \subseteq |P(|R)$.
(iii) $\{1,\text{sen}^2(x), \cos(2x)\} \subseteq \{ f / f: |R\rightarrow|R\}$.

Problema 12
Sea $\{a_1,...,a_n\}$ una base de un e.v. E sobre |K. Dado p, tal que $n \geq p$ se definen los vectores:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} \alpha_j \quad , \quad i=1,...,p$$

donde $\alpha_{i,j}=0$ si $i<j$ y $\alpha_{i,j}\neq 0$ para todo $i,j \in \{1,...,n\}$. Muestre que los vectores x_i son linealmente independientes

Problema 13
(i) sean a, b y c vectores. Determine si {a+b, b+c, c+a} es necesariamente un conjunto linealmente independiente.
(ii) Determine α, $\beta \in |R$ de modo que $(1,2, \alpha,1)^t$,$(\alpha,1,2,3)$t y $(0,1,\beta,0)^t$ sean linealmente independientes.
(iii) Sean u_1, u_2, …, u_k vectores linealmente independientes. Pruebe que para todo α escalar, los vectores $u_1+ \alpha u_2$, u_2, u_3, …, u_k son linealmente independientes.
(iv) Pruebe que el siguiente conjunto de polinomios reales son linealmente independientes

$$\{1, (x-1), (x-1) \bullet (x-2), (x-1) \bullet (x-2) \bullet (x-3), (x-1) \bullet (x-2)\bullet..... \bullet(x-k)\}.$$

Problema 14

Determinar una base del subespacio de $|R^4$ generado por los vectores (1,1,0,0)t, (0,1,1,0)t, (1,0,0,1)t y (0,0,1,1)t y extiéndala a una base de |R4.
Hint: extender un grupo de vectores, quiere decir agregar vectores para que pasen a ser una base del espacio deseado.