CONTROL N°1, Pauta Pregunta 2
LOGÍSTICA Y PRODUCCIÓN - OTOÑO 2006

PROBLEMA 2

Considere una empresa que se dedica a la importación y distribución de artículos varios. Los artículos pueden ser ingresados por K $(k = 1, \ldots, K)$ puertos a lo largo de Chile, siendo necesario firmar un contrato con los puertos utilizados los que tienen una duración de 5 años. Un contrato con un puerto k en el año t tiene un costo de a_k^t por firmar el contrato y un costo por manejo de los artículos de b_k^t (por tonelada), sin límite de capacidad para el puerto k.

Considere que existe un conjunto I $(i = 1, \ldots, I)$ de bodegas disponible para el arriendo. Sólo considere contratos anuales. Arrendar la bodega i para el año t tiene dos componentes de costos, un costo fijo de arriendo igual a c_i^t y un costo variable igual a d_i^t por tonelada procesada. Además suponga que la bodega i tiene capacidad u_i^t para el año t.

Además, suponga que desde las distintas bodegas se deben entregar los artículos a m $(m = 1, \ldots, M)$ centros de demanda. Considere conocida la demanda en toneladas para cada centro m por cada producto p $(p = 1, \ldots, P)$ la que es igual a D_{mpt} en cada período de tiempo.

Se estima que el costo de transporte por tonelada en año t desde un puerto k a la bodega i es igual a f_{kit} (U.M.) y que el costo de transporte desde de bodega i a centro de demanda m es igual a g_{imt} (U.M.).

Con esta información responda:

1. Formule este problema como un problema de programación lineal con variables binarias y continuas. Defina las variables de decisión, las restricciones y la función objetivo. Considere un horizonte de 10 años.

$$\min \sum_{i,t,k} (f_{kit} + b_k^t) x_{kit} + \sum_{i,m,t} (g_{imt} + d_i^t) x_{imt} + \sum_{k,t} a_k^t y_{kt} + \sum_{i,t} c_i^t y_{it} \tag{1}$$

$$s.t. \quad \sum_m x_{imt} \leq u_i^t y_{it} \qquad \forall i, t \tag{2}$$

$$\sum_i x_{kit} \leq z_{kt} \sum_{m,p} D_{mpt} \qquad \forall k, t \tag{3}$$

$$\sum_m x_{imt} = \sum_k x_{kit} \qquad \forall i, t \tag{4}$$

$$\sum_i x_{imt} = \sum_p D_{mpt} \qquad \forall m, t \tag{5}$$

$$\sum_{t'=t-4}^{t} y_k t \leq z_{kt} \qquad \forall k, t \tag{6}$$

$$\sum_{t'=t-4}^{t} y_k t \leq 1 \qquad \forall k, t \tag{7}$$

$$y_{kt}, y_{it}, z_{kt} \in \{0, 1\} \qquad \forall k, i, t \tag{8}$$

$$x_{kit}, x_{imt} \in \mathbb{R}^+ \qquad \forall i, k, m, t \tag{9}$$

Donde y_{kt} es la decision de firmar contrato con el puerto k en el tiempo t. y_{it} es la decision de firmar contrato con el almacen i en el tiempo t. z_{kt} es uno si podemos usar el puerto k en el tiempo t. x_{kit} es la cantidad de metros cúbicos de productos enviados del puerto k al almacen i en el tiempo t. x_{imt} es la cantidad de metros cúbicos de productos enviados del almacen i al centro de demanda m en el tiempo t.

Note que las restricciones (4) y (5) son condiciones de flujo de los productos. Restricciones (2) y (3) imponen la condicion de usar el puerto/almacen solo si hay un contrato vigente en el tiempo t.

La restricción (6) puede ser reemplazada con una igualdad, y lo que obliga son dos cosas: primero, para que tengmos un contrato vigente en el puerto k en el tiempo t, debemos de haber firmado un contrato en los ultimos cinco años (inclusive), y segundo, obliga que no mas de un contrato se firme cada 5 años. La restricción (7) es una reafirmación de lo anterior, i.e. que a lo mas un contrato se firma con un puerto cada 5 años (note que esta condicion no es necesaria si es que tenemos la condición (6)).

Condición (9) prohibe flujos negativos, y la restricción (8) son las condiciones de integralidad.

2. ¿ Cómo utilizaría una relajación Lagrangeana para descomponer el problema en problemas más sencillos de resolver?
   - ¿Qué relajación propone?
     Probablemente la mejor relajación seria relajar la restricción (6), lo que generaría problemas independientes por período de tiempo, que son ms fáciles que el problema original, que además por no ser entero (la relajación lineal), debería entregar mejores cotas lagrangeanas.
   - Describa brevemente como obtiene una cota.
     La cota debería ser el uso de iteraciones lagrangeanas, partiendo con algún valor para los multiplicadores, y luego usar las técnicas standard de gradiente (de la violación de las restricciones relajadas) para buscar nuevos valores a los multiplicadores e iterar.
   - ¿ Cómo usaría una heurística, para encontrar una solución factible?
     Es fácil encontrar una solucion factible a partir de la solución del problema relajado, de hecho, si seteamos $y_{k1} = y_{k6} = 1$, y las otras variables y_{kt} a cero, entonces cualquier conjunto de planes factibles por período es factible globalmente.
   - ¿ Cómo usaría una búsqueda Tabú para encontrar una solución aproximada en forma rápida?
     En este caso, dado que dado un conjunto de soluciones para las variables enteras es fácil determinar el valor óptimo de las variables continuas (o decidir si el problema es infactible), las variables en el problema tabú deberian er solo las variables de decicion enteras. En cuanto a las vecindades, deberían considerar al menos agregar y eliminar puertos/almacenes, y algunas combinaciones de éstas.