Logística y Producción

Capítulo 2: Configuración de Redes Logísticas

Introducción

- Decisiones:
  - Para plantas y bodegas:
    - ¿Dónde abrir?
    - ¿Cuándo?
    - ¿Con qué capacidad?
    - ¿Cuándo aumentar la capacidad?
    - ¿En qué momento se deben cerrar?
  - Flujos:
    - ¿Cómo asignar niveles de producción y flujos?

Introducción

- Múltiples Bodegas versus una Bodega Central:
  - ↑ Nivel de servicio.
  - ↑ Costos de inventario (aumenta el stock de seguridad total).
  - ↑ Costos de las bodegas (deseconomías de escala).
  - ↑ Costos de transporte a bodegas.
  - ↓ Costos de transporte a clientes.

Recolección de Información

- Información requerida:
  - Localización de clientes, negocios detallistas, bodegas, centros de distribución, plantas de producción y fuentes de materia prima.
  - Productos, con volúmenes y requerimientos de transporte y bodegaje.
  - Demanda anual por producto y por localización de clientes, efectos estacionales.
  - Costos de transporte, por modo.
  - Dimensión de envíos y frecuencia de entrega a clientes.

Recolección de Información

- Costos de bodegaje:
  - Fijos y de operación (mano de obra).
  - De inventario.
- Costos de procesar ordenes.
- Requerimientos y metas de servicio a los clientes.

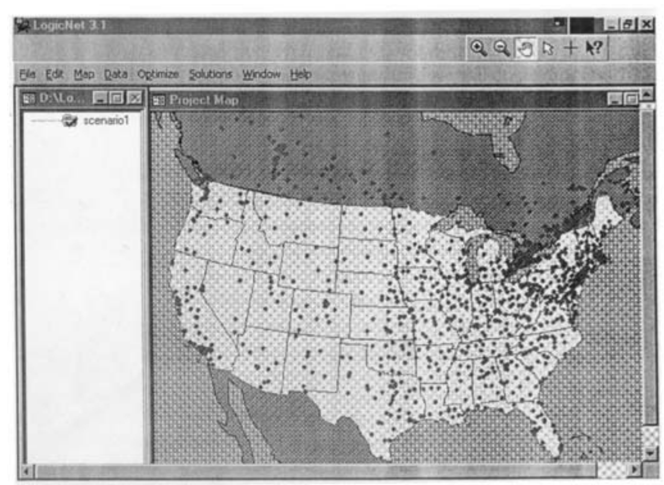
Manejo de Datos

- Paso 1: Agregación de Datos para Discusión Táctico-Estratégica.
  - En general existen demasiados datos por lo que debe hacerse una agregación.
    - Ejemplos:
      - Empresas de bebidas tienen entre 10.000 y 120.000 clientes (cuentas).
      - Wal Mart o JC Penney poseen cientos de miles de productos.
  - Permite la reducción de los datos y un mejor pronóstico de la demanda.

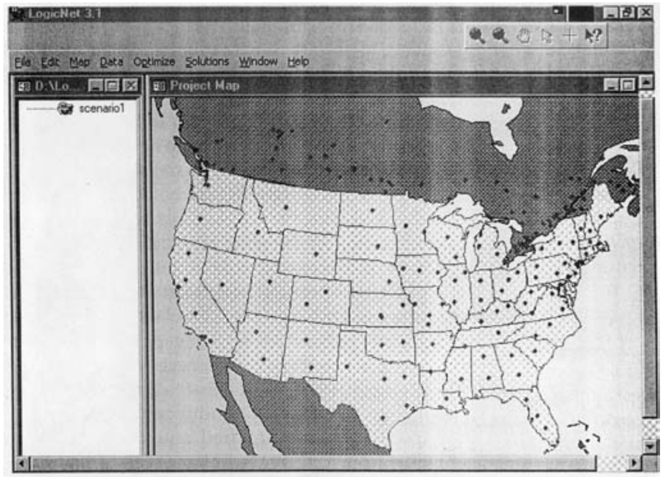
Manejo de Datos

- Agregación de clientes:
  - Por zona y tipo de servicio o producto que se requiere.
  - Uso de análisis de clusters (conglomerados).
  - Para cada zona y clase se define un cliente representativo, donde:
    - Demanda es igual a la suma de las demandas individuales.
    - La ubicación corresponde al centro de gravedad de los elementos considerados.
- Agregación de productos:
  - Características de distribución (por ejemplo, mismo origen)
  - Tipos de productos, es decir, productos que sean similares en función, costos, uso de capacidades, etc.

Manejo de Datos



Manejo de Datos



Manejo de Datos

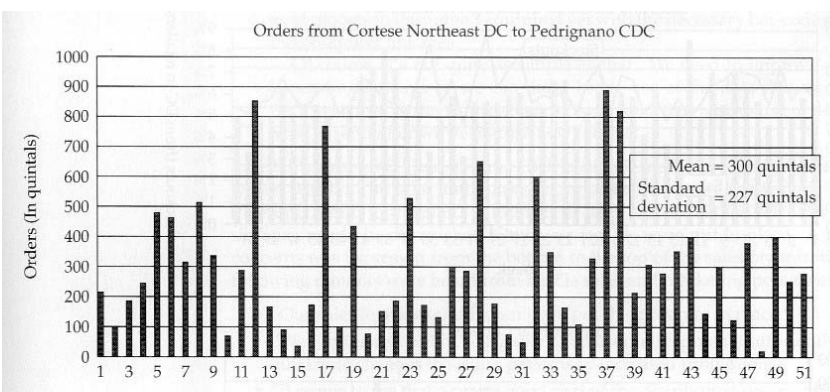
Información Histórica para Dos Clientes

Year	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
Cliente 1	22,346	28,549	19,567	25,457	31,986	21,897	19,854
Cliente 2	17,835	21,765	19,875	24,346	22,876	14,653	24,987
Total	40,181	50,314	39,442	49,803	54,862	36,550	44,841

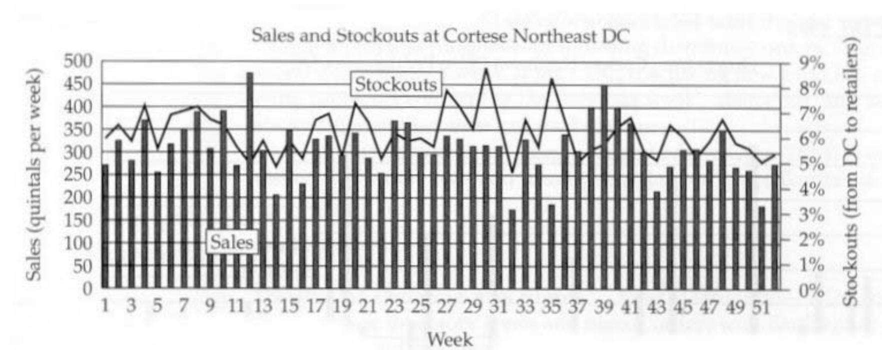
Resúmen de la Información Histórica

Estadísticas	Demanda Anual Promedio	Desviación Estándar de la Demanda Anual	Coeficiente de Variación
Cliente 1	24,237	4,658	0,192
Cliente 2	20,905	3,427	0,173
Total	45,142	6,757	0,150

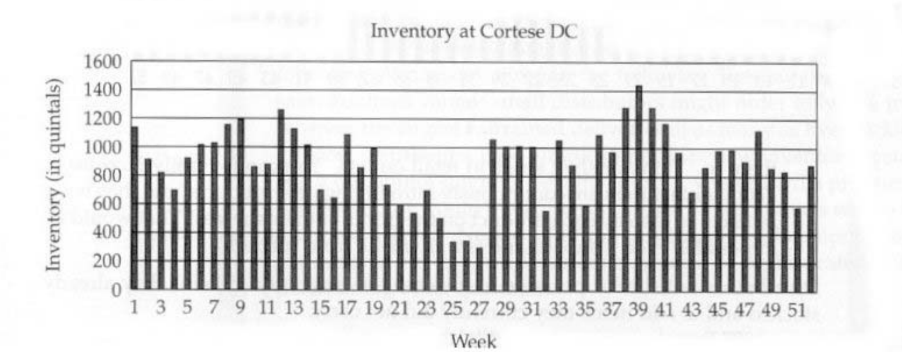
Manejo de Datos



Manejo de Datos



Manejo de Datos



Manejo de Datos

- Esquemas típicos de agregación:
  - Los puntos de demanda se reducen a 150-200.
    - Su hay clases distintas, cada clase considera 150 a 200 elementos.
    - Los reportes indican que agregar puntos a 150-200 lleva errores menores al 1%.
  - Cada zona se construye de similar demanda, aunque tengas áreas y cantidad de clientes distintos.
    - Poner punto agregado en el centro de gravedad.
  - Agregación de productos a unos 20-50.

Manejo de Datos

- Paso 2: Estimación de Costos de Transporte para discusión Táctico-Estratégica.
  - Con clientes y productos agregados.
  - Referentes a camiones:
    - Costos fijos de capital (depreciación).
    - Costos fijos de operación (patentes, seguros, sueldos choferes, etc).
    - Costos variables de operación (bencina, aceite, mantenciones, etc).
    - Costos de subcontratación.

Manejo de Datos

- Referentes a la carga:
  - Tarifas TL (Truck Load) por kilómetro.
  - Tarifas LTL (Less than Truck Load) por kilómetro.
  - Tarifas según densidad, facilidad de manejo y valor del producto.
  - Existen tarifas especiales para commodities.
- Tren ofrece ventajas en distancias largas y grandes volúmenes.
  - Ejemplo: FF.CC.

Manejo de Datos

- Paso 3: Estimación de los Costos de Bodega.
  - Costos de manejo operacional:
    - Mano de obra y servicios básicos (luz, gas y agua).
    - Proporcional al flujo por la bodega.
  - Costos fijos:
    - Arriendos o depreciación.
    - Proporcional por tramos a la capacidad de la bodega.
  - Otros:
    - Costos de almacenaje.
    - Costos de oportunidad.
    - Pérdidas.

Manejo de Datos

- Estimar los costos operacionales es relativamente sencillo, no así los fijos.
- La capacidad no se diseña para el flujo peak (no conocido bien), sino para el flujo medio más un ε.

$$\text{Inventory Turnover Ratio} = \frac{\text{Ventas Anuales}}{\text{Inventario Medio}} = \lambda$$

$$\Rightarrow \text{Inventario Medio} = \frac{\text{Ventas Anuales}}{\lambda}$$

Manejo de Datos

- Si en un bodega consideramos que el inventario peak es igual a dos veces el inventario medio y que existen espacios en los pasillos.

  $\Rightarrow$ Como regla gruesa se puede decir que el espacio en bodega requerido es aproximadamente a tres veces el requerido para el inventario medio (m^3).

Manejo de Datos

- Paso 4: Localización.
  - Se deben considerar las condiciones geográficas, infraestructura, recursos naturales, mano de obra, regulaciones, impuestos, subsidios, industria local, opinión pública, etc.
  - Más adelante se verá con mayor profundidad.

Manejo de Datos

- Paso 5: Requerimientos de Servicio.
  - Se deben analizar los requerimientos del servicio, éstos pueden tomar varias formas:
    - Máxima distancia a clientes (caso rural distinto al caso urbano).
    - Distancia media.
  - Horizonte típico de 3 a 5 años.

Manejo de Datos

- Paso 6: Validación de Datos.
  - Es fundamental al momento de configurar redes.
  - Consiste en ver si se puede replicar la situación actual, y comparar los flujos y costos actuales.
  - Permite probar cambios marginales (what if):
    - Cerrar una bodega.
    - Cambiar costos.
    - Cambiar flujos.
  - En resumen, permite verificar si el modelo conceptual y el de datos son buenos, además de evaluar posibles cambios.

Métodos de Solución

- 1.- Métodos optimizantes exactos y aproximados:
  - Modelos de programación lineal con variables binarias.
  - Métodos de Branch&Bound.
  - Fortalecimiento de formulaciones.
  - Enfoques de redondeo.
  - Relajación Lagrangeana.

Métodos de Solución

- 2.- Métodos Heurísticos:
  - Búsqueda Tabú.
  - Simulated Annealing.
- 3.- Simulación.

Configuración de DSS

- Un Sistema de Soporte a las Decisiones debe incorporar los siguientes elementos:
  - Requerimientos de servicio de los clientes.
  - Existencia de bodegas y sus características (costo, capacidad, contratos, etc).
  - Posible expansión de bodegas, y apertura de nuevas bodegas.
  - Costos y flujos posibles, de bodega a clientes, entre bodegas.
  - Componentes de los productos (bill of materials).

Configuración de DSS

- DSS deber se confiable, flexible a modificaciones, de costos razonables y respuesta rápida.

Problemas de Localización

- Características:
  - Están asociados a decisiones de nivel táctico-estratégico.
  - Pueden ser resueltos mediante heurísticas, métodos de descomposición y B&B.
- Decisiones típicas:
  - ¿Dónde localizar una planta o bodega?
  - ¿De qué capacidad debe ser la nueva instalación?
  - ¿Cuál será su nivel de uso?
  - Desde dónde y hacia dónde irán los productos para satisfacer la demanda.

Problemas de Localización

- Datos:
  - Costos de instalación y operación.
  - Costos de transporte.
  - Localización de la demanda.
  - Política de servicio a los clientes.
  - Ubicaciones potenciales.

Problemas de Localización

- Modelo general para un producto:
  - Variables :

$$x_i^t = \begin{cases} 1 & \text{si se instala planta i en el período t.} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$y_k^t = \begin{cases} 1 & \text{si se instala bodega k en el período t.} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

u_i^t = producción de la planta i en el período t.

w_k^t = inventario en la bodega k del período t al t + 1.

f_{ik}^t = flujo entre la planta i y la bodega k en el período t.

g_{ik}^t = flujo entre la bodega k y el cliente j en el período t.

Problemas de Localización

- Parámetros:

a_i^t = capacidad de la planta i en el período t.

b_k^t = capacidad de la bodega k en el período t.

r_j^t = demanda del cliente j en el período t.

c_i^t = costo unitario de producción de la planta i en el período t.

d_k^t = costo unitario de bodegaje en k en el período t.

e_{ik}^t = costo unitario de transporte entre la planta i y la bodega k en el período t.

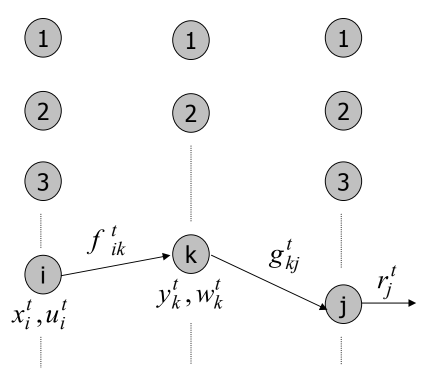
h_{kj}^t = costo unitario de transporte entre la bodega k y el cliente j en el período t.

L_i^t = costo de construcción de la planta i en el período t.

M_k^t = costo de construcción de la bodega k en el período t.

Problemas de Localización

- Red:



Problemas de Localización

- Función objetivo:

$$Min\ z = \underbrace{\sum_t \left(\sum_i L_i^t x_i^t + \sum_k M_k^t y_k^t \right)}_{\text{Costo Construcción}} + \underbrace{\sum_t \sum_i c_i^t u_i^t}_{\text{Costo Producción}} + \underbrace{\sum_t \sum_k d_k^t w_k^t}_{\text{Costo Bodegaje}} + \underbrace{\sum_t \left(\sum_i \sum_k e_{ik}^t f_{ik}^t + \sum_k \sum_j h_{kj}^t g_{kj}^t \right)}_{\text{Costo Transporte}}$$

Problemas de Localización

- Restricciones:
  - Producción en planta:

$$u_i^t \leq a_i^t \sum_{\theta=1}^{t} x_i^\theta \qquad \forall i,t.$$

  - Construcción de plantas:

$$\sum_{t=1}^{T} x_i^t \leq 1 \qquad \forall i.$$

  - Flujo a bodegas:

$$u_i^t = \sum_k f_{ik}^t \qquad \forall i,t.$$

Problemas de Localización

- Bodegaje:

$$\sum_i f_{ik}^t + w_k^{t-1} = \sum_j g_{kj}^t + w_k^t \qquad \forall k,t.$$

- Almacenaje en bodegas:

$$w_k^t \leq b_k^t \sum_{\theta=1}^{t} y_k^\theta \qquad \forall k,t.$$

- Construcción de bodegas:

$$\sum_{t=1}^{T} y_k^t \leq 1 \qquad \forall k.$$

Problemas de Localización

  - Envío a clientes:

$$\sum_k g_{kj}^t = r_j^t \qquad \forall j,t.$$

  - Naturaleza de las variables:

$$x_i^t, y_k^t \in \{0,1\}$$

$$u_i^t, w_k^t, f_{ik}^t, g_{kj}^t \geq 0$$

- Métodos de solución:
  - Branch&Bound (Ramificación y Acotamiento).
  - Heurísticas.
  - Métodos de descomposición (Relajación Lagrangeana).

Problemas de Localización

- Casos adicionales:
  - Múltiples productos:

u_{is}^t = producción del producto s en la planta i en el período t.

a_{isp} = uso del recurso p al producir el producto s en la planta i.

Cap_{ip}^t = capacidad del recurso p en la planta i en el período t.

$$\sum_s a_{isp} u_{is}^t \leq Cap_{ip}^t \qquad \forall i,p,t.$$

En forma similar para flujos en bodegas.

Problemas de Localización

- A cada cliente lo atiende sólo una bodega:

$$z_{kj}^{t}=\begin{cases}1 & \text{si el cliente j es atendido por bodega k en el período t.}\\ 0 & \sim\end{cases}$$

$$g_{kj}^{t}=r_j^{t} z_{kj}^{t} \qquad \forall k,j,t.$$

$$\sum_{k=1}^{K} z_{kj}^{t}=1 \qquad \forall j,t.$$

Problemas Clásicos

- Sin capacidades:
  - Decisiones:

$$x_i=\begin{cases}1 & \text{si se abre planta i.}\\ 0 & \sim\end{cases}$$

y_{ij} = fracción de la demanda del cliente j que satisface planta i.

  - Parámetros:

a_i = costo de abrir la planta i.

b_{ij} = costo de cubrir demanda del cliente j desde planta i (producción en planta i + transporte).

Problemas Clásicos

- Restricciones:
  - Satisfacción de la demanda de los clientes:

$$\sum_{i} y_{ij}=1 \qquad \forall j$$

  - Producción exige la construcción de plantas:

a) $y_{ij} \leq x_i \qquad \forall i,j.$ o

b) $\sum_{j} y_{ij} \leq M x_i \qquad \forall i, M$: número de clientes.

La formulación (a) lleva a más restricciones, pero es más fuerte (tight) ⇒ soluciones menos fraccionarias.

En (b), si un 30% de los clientes usan planta i, x_i=0,3.

Problemas Clásicos

- Naturaleza de las variables:

$$x_i \in \{0,1\}$$
$$y_{ij} \geq 0$$

- Función Objetivo:

$$Min \quad \sum_{i} a_i x_i + \sum_{i}\sum_{j} b_{ij} y_{ij}$$

Problemas Clásicos

- Heurística de Redondeo:
  - Consiste en resolver el problema relajando $x_i \in \{0,1\}$, imponiendo $0 \le x_i \le 1$.
  - Luego se tendrá (modelo más general):

$$Min\ \ z = \sum_i F_i x_i + \sum_i \sum_j c_{ij} y_{ij}$$

$$sa \qquad \sum_i y_{ij} = 1 \qquad \forall j$$

$$y_{ij} \le x_i \qquad \forall i.$$

Problemas Clásicos

$$0 \le y_{ij} \le 1$$

$$0 \le x_i \le 1$$

- En la solución (x,y) tomar las variables x_i con valores fraccionarios y buscar redondeos adecuados en forma heurística.
- Forma Sencilla:
  - Los x_i fraccionarios corresponden a situaciones en las que por costo de transporte conviene abrir fracciones de planta.
  - Una vez fijadas las localizaciones y queda un problema lineal sencillo en los flujos.

Problemas Clásicos

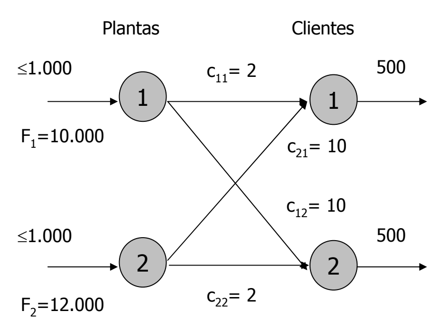
- Ejemplo:
  - Dos plantas y dos clientes.
  - Capacidad de las plantas: $C_1 = C_2 = 1000$.
  - Demanda de los clientes: $q_1 = q_2 = 500$.
  - Costos de transporte: $c_{11} = c_{22} = 2$ y $c_{12} = c_{21} = 10$.
  - Costos de construcción: F_1=10.000 y F_2= 12.000.

Solución entera $x_1 = 1, x_2 = 0$, $y_{11} = y_{12} = 500$ y z=16.000.
Solución fraccionaria $x_1 = 0.5, x_2 = 0.5$, $y_{11} = y_{22} = 500$ y z=13.000.

En forma heurística se debe trasladar la producción de las plantas más caras a las más baratas, para de esta manera hacer los valores 0 y 1 respectivamente.

Problemas Clásicos

Ejemplo:



Problemas Clásicos

- Para estos esquemas, se fijan algunas variables en 0 y otras en 1 y se resuelve nuevamente el problema lineal. Después de varias iteraciones se termina fijando todas las variables en 0 y 1.

  Cota de la solución: la solución de la primera relajación lineal.
- Otra alternativa:
  - Fortalecer la formulación inicial, es decir, agregar restricciones que son satisfechas por el problema entero pero no por una solución lineal (que se aproximen a facetas del poliedro del problema entero).

Problemas Clásicos

Si se parte con

$$\sum_j y_{ij} \leq M x_i \qquad \forall i.$$

y se agregan las restricciones

$$y_{ij} \leq x_i \qquad \forall i, j$$

se fortalece la formulación, es decir, se hace más difícil que los x_i tomen valores fraccionarios.

Problemas Clásicos

- Ejemplo:

  Se considera M=10 y la siguiente solución de flujos:

  y_{i1} =0.6

  y_{i2} =0.84

  y_{i3} =0.16

  y_{ij} =0 $\forall\ i,j$ restantes.

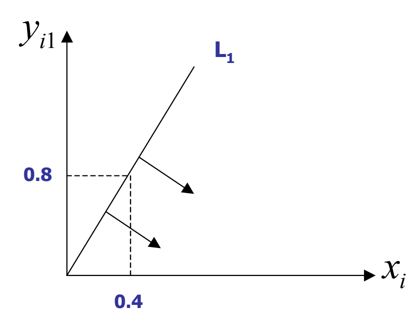
  La solución continua que satisface

  $\sum_j y_{ij} \leq 10 x_i \qquad \forall i.$ lleva a que x_i =0.16, pero agregar $y_{i1} \leq x_i, y_{i2} \leq x_i \wedge y_{i3} \leq x_i$ lleva a x_i =0.84.

Nota: En realidad no da y_{i2} = 0.84 en la formulación desagregada.

Problemas Clásicos

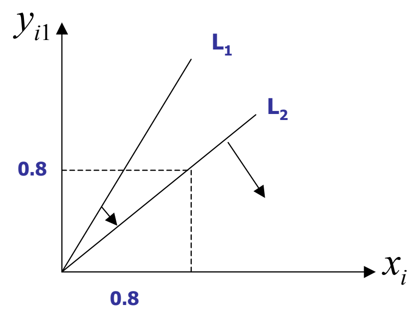
- Consideremos: $y_{i1} + y_{i2} \leq 2x_i$
- Supongamos: y_{i1} =0.8 y y_{i2} =0.



Problemas Clásicos

- Si agregamos la restricción L_2:

$$y_{i1} \le 2x_i$$



Problemas Clásicos

- Con Capacidad:

$$Min\ \ z = \sum_i F_i x_i + \sum_i \sum_j c_{ij} y_{ij}$$

$$sa \qquad \sum_i y_{ij} = 1 \qquad \forall j$$

$$\sum_j q_j y_{ij} \le Q_i x_i \qquad \forall i.$$

$$x_i \in \{0,1\}$$

$$y_{ij} \ge 0$$

Donde Q_i es la capacidad de la planta i y q_j es la demanda del cliente j.

Problemas Clásicos

- Notas:
  - Los costos definidos para transporte, producción e inventario, al evaluar decisiones de localización de más largo plazo, corresponden a aproximaciones teniendo en mente una forma de operación.
  - El costo de producción unitario en planta considera un nivel de operación aproximado, que incluye escalas de producción (no es lo mismo operar en promedio al 20% que al 90% de la capacidad instalada) y el mix de productos (están implícitamente considerados los tiempos muertos por cambio de producción).
  - El costo de inventario ya considera implícitamente una forma de llevarlo. Las cantidades ordenadas y los stocks de seguridad no se ven explícitamente en estos modelos.

Problemas Clásicos

Por ejemplo, los parámetros de los costos de inventario llevan reflejados un nivel de servicio deseado. Más complejo aún, la solución influye en los costos por inventario, ya que un número mayor de bodegas lleva a un mayor stock de seguridad total (como se verá).

- En el caso del transporte también se asume, para los costos unitarios, una forma de transporte que podría incluso depender de la solución. Por ejemplo, si hay pocas bodegas se tienen más fácilmente camiones llenos.

$\Rightarrow$ En este esquema, dada una solución de localización de largo plazo, debe chequearse al nivel operacional para comprobar que los parámetros de costos son consistentes en los dos niveles.

Relajación Lagrangeana

- Notación:
  - (P) problema de optimización.
  - FS(P) conjunto de soluciones factibles de (P).
  - OS(P) conjunto de soluciones óptimas de (P).
  - v(P) valor óptimo de (P).
  - Max maximización (problema) o máximo (valor).
  - Min minimización (problema) o mínimo (valor).

Relajación Lagrangeana

- Definición de relajación:
  - Considere los siguientes problemas:

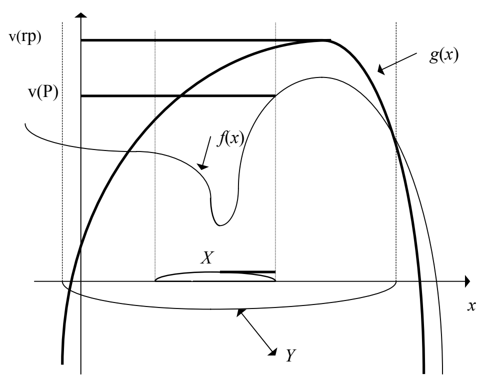
    (P) $\text{Max } \{ f(x) \mid x \in X \}$

    (RP) $\text{Max } \{ g(x) \mid x \in Y \}$

  - (RP) es una relajación de (P) si:
    - $Y \supseteq X$, y
    - $\forall x \in X, \quad g(x) \geq f(x).$

    $\Rightarrow$ v(RP) $\geq$ v(P).

Relajación Lagrangeana



Relajación para Optimización

Relajación Lagrangeana

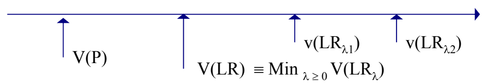
- Relajación Lagrangeana para Problemas Lineales Enteros (*Held and Karp 1970*):
  - Sea (P) $\text{Max}_x \{ fx \mid \underbrace{Ax \leq b}_{\text{Restricciones complicadas.}}, \ \underbrace{Cx \leq d}_{\text{Restricciones sencillas.}}, \ \underbrace{x \in X}_{\text{Restricciones de integralidad.}} \}$
  - Si sabemos resolver $\text{Max}_x \{ fx \mid Cx \leq d, x \in X \}$, se puede contruir una Relajación Lagrangeana de (P):
    - Sea $\lambda \geq 0$ un vector de multiplicadores, y sea (LR_λ) el siguiente problema $\text{Max}_x \{ fx + \lambda(b-Ax) \mid Cx \leq d, x \in X \}$.

Relajación Lagrangeana

- (LR $_{\lambda}$) es una relajación de (P):
  - $FS(LR_{\lambda}) \supseteq FS(P)$.
  - $\forall\, x \in FS(P),\ f\,x + \lambda(b\text{-}Ax) \geq f\,x$.

  $\Rightarrow v(LR_{\lambda}) \geq v(P)$, para todo $\lambda \geq 0$.

- (LR) es llanado Dual Lagrangeano.



Representación Gráfica

Relajación Lagrangeana

- Interpretación Geométrica:
  - El Dual Lagrangeano (LR) es equivalente a la relajación primal

    (PR) $\quad \text{Max}_{\,x}\ \{fx \mid Ax \leq b, x \in \text{Co}\{\, x \in X \mid Cx \leq d\,\}\}$,

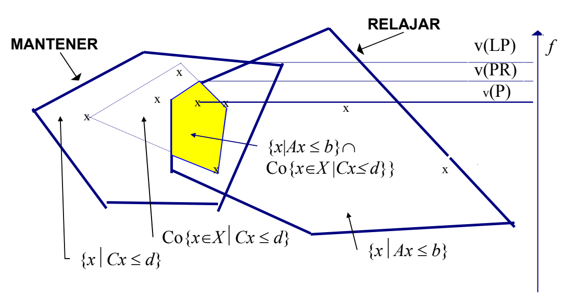
    es decir, $v(LR) = v(PR)$.

    (*demostración basada em dualidada del LP*)

    - Si $\text{Co}\{x \in X \mid Cx \leq d\} = \{x \mid Cx \leq d\}$, entonces $v(P) \leq v(PR) = v(LR) = v(LP)$. Uno dice que (LR) tiene la Propiedad de Integralidad, y en este caso la cota de la Relajación Lagrangeana es igual a la cota del (LP).

Relajación Lagrangeana

- Si $\text{Co}\{x \in X \mid Cx \leq d\} \subset \{x \mid Cx \leq d\}$, entonces $v(P) \leq v(PR) = v(LR) \leq v(LP)$, y la la cota de la Relajación Lagrangeana puede ser estrictamente mejor que la cota del (LP).



Representación Gráfica

Relajación Lagrangeana

- Para el problema:

(P) $\quad \text{Max}_{\,x}\ \{f\,x \mid Ax \leq b,\ Cx \leq d,\ x \in X\}$

Restricciones complicadas.
Restricciones sencillas.
Restricciones de integralidad.

se construye una Relajación Lagrangeana

(LR_{λ}) $\quad \text{Max}_{\,x}\ \{f\,x + \lambda(b\text{-}Ax) \mid Cx \leq d, x \in X\}$

y el correspondiente Dual Lagrangeano

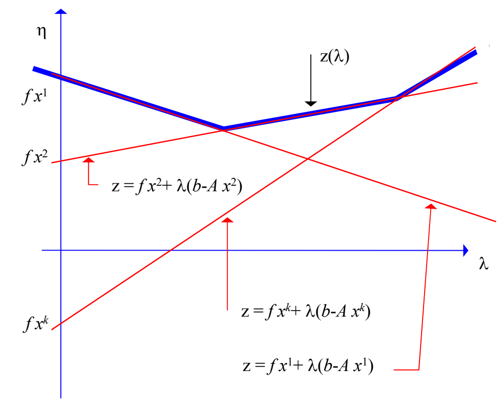
(LR) $\quad \text{Min}_{\,\lambda \geq 0}\ v(LR_{\lambda})$.

Relajación Lagrangeana

- De esta manera la Función Lagrangeana es $z(\lambda) = v(LR_\lambda)$, que corresponde a una función implícita de λ.
  - Sea $\{ x \in X \mid Cx \leq d \} = \{ x^1, x^2, \ldots, x^K \}$, entonces
    $(LR_\lambda)\ \text{Max}_x\ \{f x + \lambda(b - Ax) \mid Cx \leq d, x \in X\}$
    $= \text{Max}_{k=1,\ldots,K}\ \{f x^k + \lambda(b - Ax^k)\}$

    y $z(\lambda)$ es la envolvente superior de una familia de funciones lineales de λ, y por lo tanto una función convexa de λ.

Relajación Lagrangeana



Función Lagrangeana

Relajación Lagrangeana

- $(LR)\ \ \text{Min}_{\lambda \geq 0}\, v(LR_\lambda) = \text{Min}_{\lambda \geq 0}\, z(\lambda)$
  $= \text{Min}_{\lambda \geq 0}\ \text{Max}_{k=1,\ldots,K}\ \{f x^k + \lambda(b - A x^k)\}$
  $= \text{Min}_{\lambda \geq 0, \eta}\ \{\eta \mid \eta \geq f x^k + \lambda(b - A x^k), k=1,\ldots,K\}$

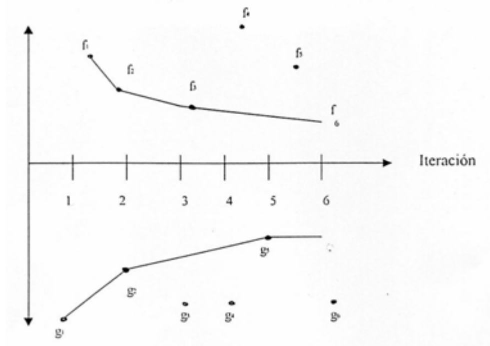
  $v(LR)$ corresponde al mínimo de una función lineal convexa por tramos, conocida solo implícitamente.

- Esta función $z(\lambda)$ tiene puntos de quiebre donde no es diferenciable. Sus conjuntos de nivel $C(\alpha)=\{\lambda \geq 0 \mid z(\lambda) \leq \alpha\}$, α escalar, son conjuntos poliedrales convexos.

Relajación Lagrangeana

- Algoritmo:
  - Paso 0: Fijar valor de λ^0.
    - Variables duales de la relajación lineal del problema.
  - Paso 1: Dado λ^k, determinar x^k y $f^k = v(LR_\lambda{}^k)$ de $(LR_\lambda{}^k)\ \text{Max}_x\ \{f x + \lambda^k(b - Ax) \mid Cx \leq d, x \in X\}$.
  - Paso 2: Con x^k, f^k y f^+ determinar λ^{k+1}, según la fórmula del subgradiente.
  - Paso 3: Determinar una solución factible $\hat{x}^k$ y su valor $f(\hat{x}^k) = g^k$ con heurísticas.
  - Paso 4:
    - Si $f^k - g^k < \varepsilon$, fin.
    - Si no, ir a Paso 1 con λ^{k+1}.

Relajación Lagrangeana



Representación Gráfica

Se toman las envolventes para determinar en cada iteración la mejor solución factible y cota. De esta manera se obtienen mejores valores de f^+ entre f y g.

Relajación Lagrangeana

- Método del Subgradiente (*Held and Karp 1970*):
  - Sea una solución con λ^k tal que x^k es la solución óptima de $(LR_{\lambda}{}^k)$.
  - Sea $s^k = (b - Ax^k)$, f^k el valor de la función objetivo en la iteración k y f^+ una estimación del óptimo.
  - El próximo valor de λ estará dado por:

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \frac{s^k \cdot \varepsilon_k (f^+ - f^k)}{\| s^k \|^2}$$

donde ε es un parámetro en [0,2].

Relajación Lagrangeana

- (LR_{λ}) da una cota para la solución del problema.
- Sea x una solución factible, entonces $f(x)$ - $(LR_{\lambda}{}^k)$ da una cota de error (la diferencia entre una solución factible y una cota del óptimo).
- La solución lagrangeana si es factible, es la óptima. Si no, se deben utilizar heurísticas para encontrar una solución factible.

Relajación Lagrangeana

- Problema de Localización de Plantas sin Capacidad:
  - Decisiones:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si se abre planta i.} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

y_{ij} = fracción de la demanda del cliente j que satisface planta i.

  - Parámetros:

f_i = costo de abrir la planta i.

c_{ij} = costo de cubrir demanda del cliente j desde planta i (producción en planta i + transporte).

Relajación Lagrangeana

- Restricciones:
  - Satisfacción de la demanda de los clientes:

$$\sum_{i} y_{ij} = 1 \qquad \forall j \qquad (1)$$

  - Producción exige la construcción de plantas:

$$y_{ij} \le x_i \qquad \forall i,j \qquad (2)$$

  - Naturaleza de las variables:

$$x_i \in \{0,1\}$$
$$y_{ij} \ge 0$$

Relajación Lagrangeana

- Función Objetivo:

$$Min \quad \sum_{i} f_i x_i + \sum_{i} \sum_{j} c_{ij} y_{ij}$$

Relajación Lagrangeana

- Alternativa de resolución para el Problema de Localización Sin Capacidad:
  - Relajar restricción (2):

$$Min \;\; z = \sum_{i} f_i x_i + \sum_{i}\sum_{j} c_{ij} y_{ij} + \sum_{i}\sum_{j} \lambda_{ij}(y_{ij} - x_i)$$
$$= \sum_{i}\sum_{j} (c_{ij} + \lambda_{ij}) y_{ij} + \sum_{i} (f_i - \sum_{j} \lambda_{ij}) x_i$$
$$sa \qquad \sum_{i} y_{ij} = 1 \qquad \forall j \qquad (1)$$
$$x_i \in \{0,1\}$$
$$y_{ij} \ge 0$$

Nota: Para $\lambda_{ij} \ge 0$ se escribe $y_{ij} - x_i \ge 0$ en Minimización.

Relajación Lagrangeana

- La solución es trivial:
  - Cada cliente se abastece de la planta con menor costo $(c_{ij} + \lambda_{ij})$ para y_{ij}, dado que no hay restricciones sobre las variables x_i.
  - Para determinar las plantas que se abren se procede de la siguiente manera:

$$x_i = 1 \quad \text{si} \quad (f_i - \sum_{j} \lambda_{ij}) < 0.$$
$$x_i = 0 \quad \text{si} \quad (f_i - \sum_{j} \lambda_{ij}) \ge 0.$$

  Nota: La solución no necesariamente es factible. Pueden haber $y_{ij} > 0$ con $x_i = 0$.
  - Lo anterior da una solución (x^k, y^k) para un λ^k dado.
  - Considerando $s^k = (x_i^k - y_{ij}^k)$ se determina λ^{k+1}.

Relajación Lagrangeana

- Determinación de una solución factible:
  - La solución lagrangeana es infactible por no respetar la restricción (2), pueden existir flujos y_{ij} > 0 con x_i = 0.
  - Una heurística simple es fijar x_i = 1 al haber flujo y_{ij} > 0.
  - Una heurística más fuerte puede utilizar la solución anterior para hacer búsqueda local:

  Para una planta i, que abastece los clientes $j_1, j_2,\dots, j_k$ se ve si el costo f_i es mayor que el costo de abastecer los clientes desde otras plantas abiertas. De esta manera se puede evaluar el cierre de plantas.

Relajación Lagrangeana

- Localización de Plantas Con Capacidad:

$$Min\ z = \sum_i F_i x_i + \sum_i \sum_j c_{ij} y_{ij}$$

$$\begin{array}{llll} sa & & & \\ (s_j) & \sum_i y_{ij} = 1 & \forall j. & (1) \\ (w_i) & \sum_j q_j y_{ij} \le Q_i x_i & \forall i. & (2) \\ & x_i \in \{0,1\},\ y_{ij} \ge 0. & & \end{array}$$

Donde Q_i es la capacidad de la planta i, q_j es la demanda del cliente j, s_j y w_i son las variables duales asociadas a las restricciones.

Relajación Lagrangeana

- Si relajamos (1), la satisfacción de demanda de los clientes:

$$\begin{aligned} Min\ z &= \sum_i F_i x_i + \sum_i \sum_j c_{ij} y_{ij} + \sum_j s_j (1 - \sum_i y_{ij}) \\ &= \sum_i F_i x_i + \sum_i \sum_j (c_{ij} - s_j) y_{ij} + \sum_j s_j \end{aligned}$$

$$\begin{array}{llll} sa & \sum_j q_j y_{ij} \le Q_i x_i & \forall i. & (2) \\ & x_i \in \{0,1\},\ y_{ij} \ge 0. & & \end{array}$$

Relajación Lagrangeana

- El problema se puede resolver de la siguiente forma:
  - Si x_i = 1, su contribución a la función objetivo es equivalente al costo de la planta i más los costos asociados a cada cliente.

$$a_i = F_i + \sum_j min(0, c_{ij} - s_j)$$

De esta manera se abren las plantas para las cuales a_i<0.

Relajación Lagrangeana

- Conociendo los valores de x_i se pueden determinar los valores para y_{ij}:
  - $y_{ij} = 1$ si $c_{ij} - s_j < 0$.
  - $y_{ij} = 0$ si $c_{ij} - s_j \geq 0$.
- Con (x, y) se determinan los nuevos valores de las variables lagrangeanas (s,w).

El problema es encontrar una solución factible: una solución generalmente no va a cumplir con la restricción de satisfacción de demanda. Si la cumpliera sería una solución óptima, ya que es igual a la cota.

Relajación Lagrangeana

- Una heurística simple sería resolver:

$$Min\ \ z = \sum_i \sum_j c_{ij} y_{ij}$$

$$sa \qquad \sum_i y_{ij} = 1 \qquad \forall j.$$

$$\sum_j q_j y_{ij} \leq Q_i x_i^+ \qquad \forall i.$$

$$0 \leq y_{ij} \leq 1.$$

donde $x_i^+ = 1$ para las plantas de la solución relajada.

Si la capacidad no alcanza, abrir plantas adicionales de menor costo.

Relajación Lagrangeana

- Si relajamos (2), la capacidad de las plantas:

$$Min\ \ z = \sum_i F_i x_i + \sum_i \sum_j c_{ij} y_{ij} + \sum_i w_i (Q_i x_i - \sum_j q_j y_{ij})$$

$$= \sum_i (F_i + w_i Q_i) x_i + \sum_i \sum_j (c_{ij} - w_i q_j) y_{ij}$$

$$sa \qquad \sum_i y_{ij} = 1 \qquad \forall j. \qquad (1)$$

$$x_i \in \{0,1\},\ y_{ij} \geq 0.$$

De esta relajación resulta un problema lineal sencillo.

Relajación Lagrangeana

- El problema se puede resolver de la siguiente forma:
  - $x_i = 1$ si $(F_i + w_i Q_i) < 0$.
  - Los valores de y_{ij} se determinan a partir de un PL.
  - Teniendo (x, y) se determinan los nuevos valores de las variables lagrangeanas (s,w).

  La solución obtenida posiblemente viole la capacidad de la planta.

  - Una heurística sencilla para obtener una solución factible sería considerar las plantas en que:

$$\sum_j q_j y_{ij} = Q_i^* > Q_i$$

Relajación Lagrangeana

- Luego, tomar el exceso $(Q_i^* - Q_i)$ más caro desde la planta y asignar cada cliente asociado a éste a plantas con capacidad residual más barata.
- Si es necesario, abrir plantas adicionales considerando aquellas con menor costo de inversión y transporte. Para esto se deben ranquear las plantas cerradas de menor a mayor costo total asociado (inversión más costo de envió a los clientes de cantidades $Q_i^* - Q_i$).

Relajación Lagrangeana

- Producción e Inventarios con Múltiples Productos y Períodos:
  - Variables:

x_k^t : producción del producto k en el período t.

h_k^t : inventario del producto k del período t al t + 1.

$$\delta_k^t = \begin{cases} 1 & \text{si se produce el producto k en el período t.} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

  - Parámetros:

A^t : capacidad de la planta en el período t [HH].

B^t : capacidad de la bodega del período t al t + 1 [m^3].

Relajación Lagrangeana

a_k : HH requeridas por cada unidad del producto k en la planta.

b_k : m^3 que requiere cada unidad del producto k en bodega.

c_k^t : costo unitario de producción del producto k en el período t.

d_k^t : costo unitario de inventario del producto k de t a t + 1.

e_k^t : costo fijo de producción del producto k en el período t.

DD_k^t : demanda por el producto k en el período t.

- Función Objetivo:

$$Min \;\; z = \sum_t \sum_k (c_k^t x_k^t + d_k^t h_k^t + e_k^t \delta_k^t)$$

Relajación Lagrangeana

- Restricciones:
  - Capacidad de la planta:

$$\sum_k a_k x_k^t \le A^t \qquad \forall t. \qquad (1)$$

  - Capacidad de la bodega:

$$\sum_k b_k h_k^t \le B^t \qquad \forall t. \qquad (2)$$

  - Producción del producto k:

$$a_k x_k^t \le A^t \delta_k^t \qquad \forall k, t. \qquad (3)$$

Para producir el producto k en el período t se debe incurrir en un costo fijo. Su producción máxima es A^t/a_k.

Relajación Lagrangeana

- Conservación de flujo:

$$x_k^t + h_k^{t-1} - h_k^t = DD_k^t \qquad \forall k,t. \qquad (4)$$

- Naturaleza de las variables:

$$x_k^t, h_k^t \geq 0, \delta_k^t \in \{0,1\} \qquad \forall k,t.$$

- Supuestos:

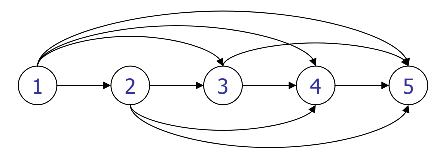
K : número de productos $= 1.000.$

T : número de variables $= 20.$

$\Rightarrow$ El problema tiene 20.000 variables binarias, 40.000 variables continuas y 40.040 restricciones.

Relajación Lagrangeana

- Alternativas de solución:
  - Si se relajan las restricciones (1) y (2) quedan 1.000 problemas pequeños, uno por producto, con 20 variables binarias y 40 restricciones cada uno. Estos problemas son fáciles de resolver ya que en cualquier solución óptima sólo se produce para cubrir la demanda completa (de todos los períodos).
  - Ejemplo: 4 períodos.



Relajación Lagrangeana

- El arco *(i,j)*, $i < j$, representa la producción en el período i para cubrir la demanda de los períodos *i,..., j-1*. De esta manera:

$$\text{Costo arco }(1,2) = \delta_k^1 + c_k^1 DD_k^1$$

$$\text{Costo arco }(1,5) = \delta_k^1 + c_k^1 \sum_{t=1}^{4} DD_k^t + \sum_{t=1}^{3} d_k^t \left(\sum_{l=t+1}^{4} DD_k^l\right)$$

$$\text{Costo arco }(3,4) = \delta_k^3 + c_k^3 DD_k^3$$

- La solución lagrangeana violaría las capacidades de las plantas y bodegas. Para evitar lo anterior se utilizan heurísticas sencillas para encontrar soluciones factibles:

Relajación Lagrangeana

- Si se viola la capacidad de la planta, adelantar la producción a un período en que haya capacidad disponible y guardar ésta en bodega.
- Si se viola la capacidad de la bodega, reducir inventarios y producir en período posteriores (aumenta costo fijo).

- Otra forma de proceder es relajar la restricciones (4), perdiendo la conservación de flujos.

  Queda un problema por período, cada uno con 1.000 variables binarias y 1.002 .

Relajación Lagrangeana

- Los problemas quedan:

$$\begin{aligned}
Min \ \ z &= \sum_k (\bar{c}_k^t x_k^t + \bar{d}_k^t h_k^t + e_k^t \delta_k^t) \\
sa \qquad & \sum_k a_k x_k^t \le A^t \\
& \sum_k b_k h_k^t \le B^t \\
& a_k x_k^t \le A^t \delta_k^t \qquad \forall k.
\end{aligned}$$

Se pueden resolver por análisis.

Relajación Lagrangeana

- Para x_k^t , tomar el producto k más rentable, es decir, el que minimiza:

$$R_k^t = \bar{c}_k^t \left(\frac{A^t}{a_k} \right) + e_k^t$$

Si $R_k^t < 0, \delta_k^t = 1$ y $x_k^t = \frac{A^t}{a_k}$. Para los restantes, $x_k^t = 0$.

Si $R_k^t \ge 0, \delta_k^t = 0$ y $x_k^t = 0$ para todos.

- Para h_k^t, tomar el producto k que minimiza:

$$S_k^t = \bar{d}_k^t \left(\frac{B^t}{b_k} \right)$$

Relajación Lagrangeana

Si $S_k^t < 0, \ h_k^t = \frac{B^t}{b_k}$. Para los restantes, $h_k^t = 0$.

Si $S_k^t \ge 0, h_k^t = 0$ para todos.

- No es una solución que aporte mucho ya que se produce y almacena sólo un producto, sin consideraciones de demanda.

Métodos Heurísticos

- Búsqueda Tabú:
  - 0. Solución factible.
  - 1. Moverse al mejor vecino (aunque sea peor):
    - Definir vecino: cambio mínimo de solución.
      - Ejemplo: abrir o cerrar una planta.
    - Condición: debe haber camino de la solución actual al óptimo.
  - 2. Lista Tabú:
    - No repetir soluciones.
      - Ejemplo: Si se abre una planta, no cerrarla por t iteraciones salvo que la función objetivo de la solución sea mejor que el incumbente.

Métodos Heurísticos

- 3. Diversificación e Intensificación:
  - Diversificación: partir de otra solución factible o hacer cambios que no han sido elegidos.
  - Intensificación: quedarse en la cercanía de buenas soluciones, con cambios locales.
  - Generan buenos resultados.
- 4. Termino:
  - Terminar después de N iteraciones o cuando no haya mejora.

Métodos Heurísticos

- Simulated Annealing:
  - Sea Δ la variación de la función objetivo al moverse a S^1, un vecino de S.
    - Si $\Delta \leq 0$, moverse a S^1.
    - Si $\Delta > 0$, moverse a S^1 si $e^{-(\Delta / KT)} \geq \theta$. Donde θ es un número aleatorio uniformemente distribuido en [0,1] y T es un parámetro de control (la temperatura).

      Típicamente T se va bajando durante a las iteraciones, reduciendo la probabilidad de aceptar peores soluciones. Se puede subir T en el proceso, como diversificación si no aparecen mejores soluciones, para salir de óptimos locales.
  - Permite obtener buenos resultados.

Métodos Heurísticos

- Problema de Localización con Búsqueda Tabú:
  - Se deben definir vecinos:
    - Abrir una planta.
    - Cerrar una planta.
    - Intercambio: una planta se abre y otra se cierra.
  - Lista Tabú:
    - Una planta abierta (cerrada) no se puede cerrar (abrir) por T iteraciones.
  - Diversificación e Intensificación:
    - Diversificación: Partir con soluciones significativamente diferentes o abrir plantas que han aparecido poco.
    - Intensificación: buscar soluciones similares a aquellas con buen costo.

Métodos Heurísticos

- Ejemplo 1:
  - Ocho posibles plantas $x_1 = x_3 = x_8 = 1$, y los clientes se asignan a la planta más cercana.
  - Se prueban soluciones vecinas:
    - Hacer x_2 o x_4 o x_5 o x_6 o x_7=1.
    - Hacer x_1 o x_3 o $x_8 = 0$, esto puede llevar a configuraciones infactibles al no haber capacidad suficiente.
    - Hacer intercambios, por ejemplo abrir 2 y cerrar 1.
    - Ver todas las combinaciones es muy largo.

    En cada caso reasignar clientes y elegir el mejor vecino. Si el número de vecinos es muy alto se puede mirar sólo un subconjunto. Este subconjunto se puede determinar aleatoriamente o según un esquema definido.

Métodos Heurísticos

- La elección de vecinos debe ser tal que desde cualquier solución se puede llegar al óptimo a través de una cadena de éstos.
- Se puede elegir pasar a soluciones infactibles en el algoritmo, siempre que cada cierto número de iteraciones se vuelva a la factibilidad. Se penalizan las infactibilidades.
- El algoritmo termina después de un número máximo de iteraciones, y se elige la mejor solución obtenida en el proceso. También termina si no se producen mejoras en un número determinado de iteraciones, a pesar de diversificaciones.

Métodos Heurísticos

- Ejemplo 2:
  - 5 plantas potenciales, sin restricciones de capacidad.
  - 10 clientes.
  - Variables:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si se abre planta i.} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el cliente j se abastece desde la planta i.} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

  - Parámetros:

F_i = costo fijo de la planta i.

c_{ij} = costo de abastecer al cliente j desde la planta i

Métodos Heurísticos

- Modelo:

$$Min \ \ z = \sum_i F_i x_i + \sum_i \sum_j c_{ij} y_{ij}$$

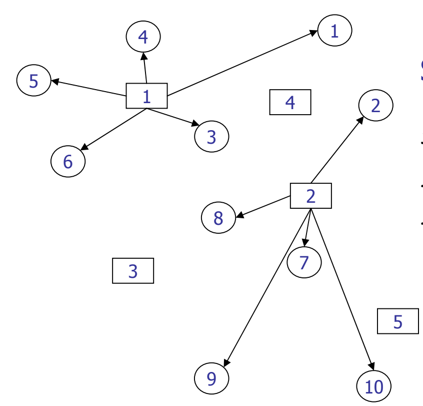
$$sa \qquad \sum_i y_{ij} = 1 \qquad j = 1,\ldots,10.$$

$$y_{ij} \le x_i \qquad i = 1,\ldots,5 \qquad j = 1,\ldots,10.$$

$$x_i \in \{0,1\}$$

$$y_{ij} \ge 0$$

Métodos Heurísticos



Solución Inicial

$$x_1 = x_2 = 1$$

$$y_{11} = y_{13} = y_{14} = y_{15} = y_{16} = 1$$

$$y_{22} = y_{27} = y_{28} = y_{29} = y_{210} = 1$$

Métodos Heurísticos

- Posibles vecinos:
  - Ingresar una planta. Por ejemplo, hacer $x_5 = 1$.

    Al abrir la planta 5, se ve que algunos clientes quedan más cerca de ésta que de las otras. Sean éstos los clientes 9 y 10. Luego, considerando el costo de la solución anterior,

    $$F_1 + F_2 + c_{11} + c_{13} + c_{14} + c_{15} + c_{16} + c_{22} + c_{27} + c_{28} + c_{29} + c_{210}$$

    el cambio se evalúa como:

    $$\Delta(+5) = \underbrace{F_5}_{\text{Costo Planta}} - \underbrace{[(c_{29} - c_{59}) + (c_{2,10} - c_{5,10})]}_{\text{Ahorros en Transporte}}$$

    Análogamente, se pueden analizar los casos en que se abren las plantas 3 o 4, dando valores $\Delta(+3)$ y $\Delta(+4)$. Luego se ve cuál es el menor, por ejemplo $\Delta(+5)$.

Métodos Heurísticos

- Cerrar una planta. Por ejemplo, hacer $x_1 = 0$.

  El cierre de la planta 1 se evalúa de la siguiente manera:

  $$\Delta(-1) = \underbrace{-F_1}_{\text{Ahorro Costo Planta 1}} + \underbrace{[(c_{21} - c_{11}) + (c_{23} - c_{13}) + (c_{24} - c_{14}) + (c_{25} - c_{15}) + (c_{26} - c_{16})]}_{\text{Aumento en los Costos de Transporte}}$$

  Análogamente, se calcula $\Delta(-2)$. Luego se ve cuál es el valor mínimo, por ejemplo $\Delta(-1)$.

Métodos Heurísticos

- Intercambiar dos plantas. Por ejemplo, hacer $x_5 = 1$ y $x_2 = 0$.

  Para abrir la planta 5 y cerrar la planta 2, se ve como reasignar clientes minimizando los costos de transporte. Supongamos que los clientes 7, 8, 9 y 10 quedan asignados a la planta 5. De esta manera, el cambio ocurrido se evalúa como:

  $$\Delta(+5,-2) = \underbrace{F_5 - F_2}_{\text{Diferencia en los Costos de las Plantas}} + \underbrace{[(c_{57} - c_{27}) + (c_{58} - c_{28}) + (c_{59} - c_{29}) + (c_{5,10} - c_{2,10}) + (c_{12} - c_{22})]}_{\text{Cambio de Costos de Transporte al pasar clientes 7, 8, 9 y 10 a la planta 5, y cliente 2 a la planta 1.}}$$

  Análogamente, se analizan todos los otros intercambios. Luego se elige el mínimo, por ejemplo $\Delta(+5,-2)$.

Métodos Heurísticos

En forma posterior a todo lo anterior, se elige el mínimo entre $\{\Delta(+5), \Delta(-2), \Delta(+5,-2)\}$ como la movida a hacer.

Supongamos que el mínimo es $\Delta(+5,-2)$, entonces se ponen nodos 5 y 2 en la Lista Tabú, y no se saca el nodo 5 o agrega el nodo 2 por T iteraciones.

- Notas:
  - Probar cada vecino resulta ser muy fácil (por aritmética). Sin embargo, en algunos casos puede ser muy difícil (por ejemplo, un PL).

    Se pueden hacer aproximaciones heurísticas.
  - Si existen muchos vecinos probar sólo un subconjunto de éstos.

Ramificación y Acotamiento

- Introducción:
  - En muchos casos la enumeración explícita de las soluciones factibles de un problema entero es impracticable debido a que son muchas. Pero, en algunos casos no queda opción.

    $\Rightarrow$ ¿Es posible enumerar las soluciones en forma "inteligente"?
  - Este tipo de algoritmos intentan una enumeración parcial, llamada enumeración implícita, eliminando aquellas soluciones que puedan probarse no óptimas.

Ramificación y Acotamiento

- Concepto:
  - Ramificación: proceso de generar subproblemas de menor tamaño, dividiendo el conjunto factible.
  - Acotamiento: proceso que por medio del análisis de las soluciones obtenidas para los subproblemas establece si es posible obtener mejores soluciones dividiendo nuevamente algún subproblema.

Ramificación y Acotamiento

$$\begin{aligned} &Min \quad z = c^t x \\ &sa \quad Ax \le b \\ &\qquad\;\; x_j \in N \end{aligned}$$

$$(P_0) \quad z_0 = c^t x \quad s.a. \quad x \in R_0$$
$$R_0 = \{x : Ax \le b, x_j \ge 0 \ \forall j\}$$

$$(P_0^+) \quad z_0^+ = c^t x \quad s.a. \quad x \in R_0^+ \qquad\qquad (P_0^-) \quad z_0^- = c^t x \quad s.a. \quad x \in R_0^-$$
$$R_0^+ = R_0 \cap \{x : x_k \ge [x_k^0] + 1\} \qquad\qquad R_0^- = R_0 \cap \{x : x_k \le [x_k^0]\}$$

Ramificación

$[x_k^0]$ denota la parte entera de x_k^0.

Ramificación y Acotamiento

- Características:
  - De la manera descrita anteriormente es posible construir un árbol en el cual de cada nodo derivan dos ramas.
  - En las ramas finales estarían todas las soluciones factibles o posibles.
  - Cuando un nodo del árbol no requiere más ramificaciones se "poda" esa rama.

Ramificación y Acotamiento

- Razones para no ramificar:
  - El problema en el nodo resulta infactible.
  - La solución en el nodo es factible para el problema entero.
  - El valor óptimo z del nodo es tal que $z \geq z'$, donde z' es el incumbente o mejor solución entera conocida.

Ramificación y Acotamiento

- Algoritmo:
  - 0. $L = \{P_0\}$, $z' = +\infty$.
  - 1. Escoger un problema (nodo) de la lista L (problemas candidatos). Sea (P) el problema seleccionado.
    - Si $L = \phi$, TERMINAR con las siguientes conclusiones:
      - Si $z' = +\infty$, entonces el problema entero es infactible.
      - Si $z' \neq +\infty$, la solución de éste es (x', z').
    - Si $L \neq \phi$, resolver el problema (P).
      - Si (P) es infactible, eliminarlo de la lista L (ir a 1).

Ramificación y Acotamiento

- Si (P) es factible, sea z^* el valor óptimo y x^* una solución óptima.
  - Si $z^* \geq z'$ eliminar el problema (P) de la lista e ir a 1.
  - Si $z^* < z'$ y x^* cumple la condición de integralidad, entonces actualizar el valor del incumbente: $z' \leftarrow z^*$ y $x' \leftarrow x^*$, eliminar el problema (P) de la lista e ir a 1.
  - Si $z^* < z'$ y x^* no cumple la condición de integralidad, considere $x_k^* \notin N$. Ramificar el problema (P) en (P^+) y (P^-). Estos se construyen agregando $x_k \leq [x_k^*]$ y $x_k \geq [x_k^*] + 1$ al problema (P), respectivamente. Ambos problemas se agregan a la lista L, $L \leftarrow L \cup \{P^-, P^+\}$. Ir a 1.

Ramificación y Acotamiento

- Algunas Etapas con más detalle:
  - ¿Cuál variable elegir para la ramificación?
    - Una buena regla es darle prioridad a aquellas variables con mayor contribución a la función objetivo.
  - De todos los nodos que pueden ser ramificados, ¿cuál elegir?:
    - Una posibilidad es ir llenando los niveles del árbol de problemas, en orden.
    - Otra es explorar en profundidad, eligiendo nodos que derivan de los recién ramificados.
    - Una tercera posibilidad es escoger entre todos los problemas candidatos aquel que tiene mejor valor de la función objetivo.

Ramificación y Acotamiento

- Uso de una buena cota superior:
  - Si al comenzar se contara con alguna solución entera factible, se podría utilizar su valor como incumbente y así eliminar ramas desde un comienzo.
- Resolución eficiente de los subproblemas:
  - El algoritmo Simplex Dual puede ser utilizado para reoptimizar a partir de la solución del nodo padre.

Ramificación y Acotamiento

- Problemas con variables binarias:
  - Si las variables son todas binarias no es necesario agregar restricciones a los subproblemas, es suficiente fijar una variable fraccionaria en 0 ó 1.
  - El número máximo de subproblemas que hay que examinar es $O(2^n)$ para un problema con n variables.
  - La relajación lineal se obtiene reemplazando $x_j \in \{0,1\}$ por $0 \leq x_j \leq 1$, para cada variable.

Ramificación y Acotamiento

- Ejemplo:

$$
\begin{aligned}
&Max \;\; z = 2x_1 + x_2 + 2x_3 \\
&sa \\
&\qquad x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 3 \\
&\qquad 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 3 \\
&\qquad x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 4 \\
&\qquad x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\}
\end{aligned}
$$

Problema de Programación Lineal Entera

Ramificación y Acotamiento