Guía de Ejercicios No.4: Inversión

1. **Modelo de q Tobin y Subsidio a la Inversión**

   Considere una firma que enfrenta una tasa de interés constante r, tiene una función de producción cóncava $F(K)$[1], paga $p \equiv 1$ por unidad de capital y enfrenta costos cuadráticos de ajustar su stock de capital, con parámetro de convexidad b. Los costos de instalar capital se pueden descontar para efectos contables. Suponga que $\delta = 0$. Estudiaremos el efecto de un subsidio a la inversión.

   Suponga que el gobierno instituye un subsidio σ a la inversión, de modo que el costo de invertir I se reduce de $I + C(I,K)$ a $(1-\sigma)I + C(I,K)$.

   a) Estamos suponiendo que el subsidio del gobierno no involucra los costos de ajuste. Discuta cúan razonable es este supuesto para distintas interpretaciones de los costos de ajuste

   b) Muestre que el q de estado estacionario, q^*, es igual a $1-\sigma$. Interprete económicamente este resultado. Caracterice el stock de capital de estado estacionario, K^*.

   c) Determine el diagrama de fase en el espacio (K,q). Justifique las flechas en cada región y muestre que hay un brazo estable.

   d) Considere un incremento no anticipado (y permanente) en σ. Asumiendo que el brazo estable del nuevo estado estacionario se encuentra por debajo del estado estacionario original[2], describa la evolución de K y q.

   e) Igual que la parte anterior, pero ahora el incremento en σes anticipado, es decir, se conoce con T períodos de anticipación.

2. **Verdadero, Falso o Incierto**

   Para cada una de las siguientes afirmaciones decida si es Verdadera, Falsa o si no es posible decidir al respecto (Incierta). Fundamente cada elección en no más de 50 palabras.

   a) La teoría neoclásica es un caso particular de la teoría q de inversión.

   b) La principal diferencia entre la teoría neoclásica de inversión y la teoría q de inversión es que la primera no considera los costos de instalar capital.

   c) La teoría del acelerador para inversión es poco satisfactoria porque no ajusta bien los datos.

   d) La importancia del costo del usuario del capital en ecuaciones de inversión sigue siendo despreciable hoy en día, tal como lo ha sido desde que Jorgenson formulara la teoría neoclásica de inversión en los años sesenta.

[1] Por simplicidad ignoramosel factor trabajo; esto no afecta ninguna de las conclusiones que siguen

[2] Esto no necesariamente será así, pueden darse las dos alternativas. ¿Se le ocurre una intuición económica al respecto? No es fácil

3. Impuestos Corporativos e Impuestos Personales

En clases se analizó el impacto de impuestos corporativos sobre la inversión en el contexto de la teoría *q*, suponiendo que el objetivo de la firma era maximizar las utilidades. Sin embargo, este análisis ignoró el hecho que los dueños de la firma (accionistas) pagan impuestos por el ingreso que derivan de sus acciones (ganancias de capital y dividendos). Por lo tanto el problema de maximización correcto es aquel del "accionista representativo" que agrega los impuestos personales a los impuestos corporativos. En este problema se extiende el análisis hecho en clases al caso más general.

Hacemos los siguientes supuestos:

(i) La función de producción es $F(K,L)$.

(ii) El pago a K es r, que no varía en el tiempo.

(iii) El pago a L es w, que tampoco varía en el tiempo.

(iv) Los costos de ajustar capital vienen dados por $C(I,K)=\frac{bI^2}{2K}$.

(v) La tasa de impuesto por los intereses de depósitos en los bancos es igual a τ_{int}.

(vi) La tasa de impuesto que pagan los accionistas por los dividendos que reciben de la firma es τ_{div}.

(vii) La tasa del impuesto a las utilidades de la empresa es τ_{util}.

(viii) La firma financia una fracción α (exógena) de su capital (incluyendo la inversión corriente) vía crédito (a tasa constante igual a r) y la fracción restante (1 - α) vía utilidades retenidas.

(ix) El capital no se deprecia.

A continuación se le plantean varias preguntas. Sólo algunas requieren haber respondido las partes anteriores.

(a) Explique por qué el valor de la firma, V_t, debe satisfacer:

$$(1-t_{\text{int}})rV_t=(1-t_{div})D_t+\dot{V}_t \tag{1}$$

Multiplicando ambos lados de (1) por $e^{-r(1-t_{inv})(s-t)}$, integrando entre t y ∞, e imponiendo la condición de transversalidad habitual se concluye que:

$$V_t=(1-t_{div})\int_t^\infty e^{-r(1-t_{\text{int}})(s-t)}D_S\,ds \tag{2}$$

(b) A partir del supuesto (viii) exprese D_t en términos de $F(K,L)$, w, L, α, r, K, I, $C(I,K)$ y τ_{util}.

(c) Combinando (1) con la expresión obtenida en la parte anterior, escriba el Hamiltoniano correspondiente.

(d) A partir de las condiciones de primer orden para el problema de maximización correspondiente, muestre que el nivel de capital de estado estacionario, K^*, queda caracterizado por:

$$F_K(K^*,L)=r\left[a+(1+a)\frac{(1-t_{\text{int}})}{(1-t_{util})}\right] \tag{3}$$

(e) Dé alguna intuición de por qué K^* no depende de la tasa de impuestos a los dividendos que pagan las empresas.

(f) De (3) se infiere que K^* depende de α. ¿Contradice este hecho el Teorema de Modigliani-Miller? Justifique.

(g) En Chile, $\tau_{util} = 0.15$ y, en la práctica, $\tau_{int} = 0.15$[3]. Determine si la forma en que las firmas financian su inversión (deuda vs. utilidades retenidas) afecta el stock de capital de largo plazo.

4. q **Marginal y Costos No Convexos de Ajuste**

Nota importante: *El problema que sigue requiere hacer varios cálculos que son mucho más fáciles de lo que parece si usted no procede mecánicamente sino piensa cuidadosamente qué está haciendo. Por eso se sugiere que trabaje con calma, revisando lo que va haciendo para evitar errores. Note también que aún si Ud. se enreda con los cálculos en las partes (d) y (e), los enunciados de estas partes contienen la información necesaria para responder las partes (f), (g) y (h).*

Al entrar en el último período de operación, una firma tiene un contrato de arriendo vigente por una unidad de capital ($K_0 = 1$), pagando un arriendo de 1 (por período). Si la firma decide modificar su stock de capital (es decir, renegocia el contrato de arriendo y reorganiza la planta) para su último período de operación, debe pagar un costo de ajuste f, donde $0 < f < 1$. En consecuencia las utilidades de la firma en este problema de *un solo período*, como función del stock de capital que elige en ese período, K_1, vienen dadas por:

$$\Pi(K_1, 0) = 2q\sqrt{K_1} - K_1 - f[K_1 \neq K_0]$$

donde $[A]$ es igual a 1 si se cumple la proposición A e igual a cero en caso contrario y θ denota un shock de productividad/demanda (que, para fijar ideas, toma valores entre 0 y 2). La firma conoce el valor de θ al momento de tomar su decisión de inversión.

(a) Encuentre la política óptima de inversión de la firma y grafique la inversión de la firma como función de θ: $I(\theta)$.

(b) Determine la función de valor de la firma, $V(K_0,\theta)$, es decir, las utilidades netas de una firma con shock θ y stock K_0 antes de tomar su decisión de invertir.

(c) Calcule q marginal como función de θ (es decir, calcule la derivada parcial de $V(K_0,\theta)$ respecto de K_0). No se sorprenda por el hecho que q marginal tomará valores "en torno" a cero (en lugar de uno); esto se debe a que el capital se arrienda por sólo un período. Grafique *q* marginal como función de θ; explique la forma funcional que obtiene; determine si ésta es consistente con la teoría *q* estándar.

Asuma que existe un continuo de firmas como aquella de las partes anteriores, todas las cuales tienen el mismo K_0 y enfrentan el mismo shock θ pero difieren en sus costos de ajuste (f). Suponga que f tiene una distribución uniforme en [0;1] y que θ toma valores entre 0 y 2.

(d) Calcule la inversión agregada como función de θ. **Ayuda**: Si $I(\theta, f)$ denota la inversión de una firma con costo de ajuste f cuando el shock es θ, entonces la inversión agregada, como función de θ, viene dada por:

$$I_A(q) = \int_0^1 I(q; f)\,df.$$

(e) Determine *q*-marginal agregado, q_A, como función de θ. Una ayuda análoga a la de la parte anterior es válido acá.

(f) Grafique (cualitativamente) en el plano (q,I) el lugar geométrico que toman $(q_A(\theta), I_A(\theta))$ a medida que θ varía entre 0 y 2. ¿Tiene sentido estimar una función agregada de inversión

[3] Es un dato que la mayoría de las personas "se las arregla" para no tributar más que el 15%.

como función de q_A? ¿Es cierto que q_A determina I_A, es decir, que q_A es un estadístico suficiente para I_A? ¿Qué ha sucedido con la teoría q de inversión?

5. Inversión e incertidumbre

En clases vimos una situación bastante sofisticada en que un aumento en la incertidumbre puede llevar a un *incremento* de la inversión. En este problema vemos el mismo fenómeno en un contexto mucho más sencillo.

Consideramos el problema de un período. La incertidumbre que enfrenta la firma tiene su origen en que al momento de elegir su stock de capital no conoce el salario que pagará a sus trabajadores. En cambio, en el momento en que la firma decide la cantidad de trabajadores a contratar si conoce el salario. La firma maximiza el valor esperado de sus utilidades. Sus utilidades, como función del capital (K), trabajo (L) y salario (w) vienen dadas por:

$$p(w,K,L) = 4K^{g/2}L^{1/2} - wL - K,$$

donde $0 < \gamma < 1$ y hemos supuesto que el precio del capital es uno. Además suponemos que $\log(w)$ sigue una distribución normal de media μ y varianza σ^2, de modo que[4]:

$$E\left[\frac{1}{w}\right] = e^{-m+\frac{1}{2}s^2}.$$

(a) Muestre que la inversión de la firma, que en este modelo de un período será igual al stock de capital K^* que elija, es creciente en la incertidumbre respecto de los salarios (medida por σ^2). Calcule $\partial\log(K^*)/\partial\sigma^2$.

(b) De dónde, cree Ud. proviene la intuición fuertemente arraigada según la cual la inversión cae a medida que aumenta la incertidumbre.

6. Inversión y costos de ajuste

Una firma que ha heredado un stock de capital K_0 y que vive por un período desea maximizar la siguiente función

$$q - (K - K^*)^2 - c(I)$$

donde θ es un parámetro exógeno de productividad, K es el stock de capital después de ajustar K_0, K^* es el nivel óptimo de capital si no hubiese fricciones en la economía, y $c(I)$ es la función de costos de ajuste, que depende del tamaño del ajuste, I. Suponga que no hay depreciación, de modo que $K = K_0+I$. La función $-(K - K^*)^2$ intenta medir la pérdida que significa para la empresa alejarse del nivel de capital óptimo.

(a) Determine la condición de óptimo de la empresa, y explíquela intuitivamente.

(b) Suponga ahora que $c(I) = \frac{c}{2}\left(\frac{I}{K^*}\right)^2$. Determine la inversión como función de K_0, y grafique esta relación. Explique su forma intuitivamente.

---

[4] Hemos elegido varias constantes de modo de reducir las posibilidades que Ud. cometa errores algebraicos. A pesar de ello, sea cuidadoso en su álgebra. En todo caso, vale la pena notar que lo que sigue es igualmente válido cualesquiera sea la distribución de probabilidad de w y para una función de utilidad

$$\pi(w,K,L) = AK^{\alpha}L^{\beta} - wL - p_K K,$$

con $\alpha+\beta < 1$.

(c) Suponga ahora que $c(I)=\begin{cases} c \; si \; I \neq 0 \\ 0 \; si \; I = 0 \end{cases}$. Determine la inversión como función de K_0, y grafique esta relación. Explique su forma intuitivamente.

(d) Ahora suponga que c(I)= $c|I|$. Determine la inversión como función de K_0, y grafique esta relación. Explique su forma intuitivamente.

(e) Esta vez, suponga que: $c(I)=c_1+\frac{c_2}{2}\left(\frac{I}{K^*}\right)^2$. Determine la inversión como función de K_0, y grafique esta relación. Explique su forma intuitivamente.

7. Inversión y utilidades contables

En la mayoría de los países, incluido Chile, al momento de calcular el impuesto a las utilidades se puede imputar como costo los intereses pagados por concepto de deudas, pero no el costo alternativo del capital propio utilizado en una inversión. En este problema exploramos las consecuencias de esta característica del sistema tributario y su interacción con la depreciación acelerada.

Consideramos el problema de maximización de utilidades *después de impuestos* de una firma que produce sólo un período, con función de producción $f(K)$, con $f' > 0$ y $f'' < 0$.[5] Al final del período el valor del capital es nulo.

Tomamos el precio al que la firma vende el bien que produce igual a uno; además suponemos que no hay costos asociados a instalar el capital con que la firma producirá durante el período que estudiamos. Suponemos que la firma puede financiar una fracción b de su capital mediante deuda. Las utilidades pagan un impuesto de tasa τ. También suponemos que la depreciación acelerada permite a la firma contabilizar como gasto una fracción z del capital instalado. Finalmente, la tasa de interés es r.

(a) Escriba los impuestos que paga la firma y las utilidades de la firma, después de pagar impuestos, como función de K.

(b) Derive la condición de primer orden de este problema.

La derivación anterior supuso que el capital se deprecia por completo en un período. Si relajamos este supuesto, usando el método Hamiltoniano se obtiene la siguiente condición de primer orden (que puede diferir de la que Ud. obtuvo):

$$f'(K)=\frac{1-t\,(b+z)}{1-t}(r+d)$$

donde δ denota la tasa de depreciación. En lo que sigue, trabaje con esta C.P.O.; *no* tiene que derivarla.

(c) Denotando por $K(\tau)$ el capital que maximiza las utilidades (netas) de la firma cuando el impuesto a las utilidades es de tasa τ, use la expresión anterior para expresar $K'(\tau)$ en función de b, z, τ, r, δ y $f''(K(\tau))$.

(d) Notando que tanto b como z toman valores entre 0 y 1, de modo que b+z toma valores entre 0 y 2, determine los rangos de valores de b y z en los cuales la demanda por capital es creciente, decreciente o independiente de τ.

(e) Muchas veces se afirma que aumentar el impuesto a las utilidades reduce la demanda por capital (y por ende la inversión). En vista del resultado de la parte anterior, concluya que esta intuición puede estar equivocada y explique dónde se origina esta equivocación.[6]

---

[5] Por simplicidad no incluimos L en la función de producción.

[6] En el paper de A.Bustos, E.Engel y A.Galetovic, "Impuestos y demanda por capital. Teoría y evidencia para Chile, 1985–1995" se aplica esta idea. Los valores de b y z correspondientes a las 83 sociedades anónimas más

(f) Un supuesto clave en la derivación anterior es que b viene dado exógenamente. Si la firma pudiera elegir b, ¿qué valor eligiría? Justifique. De un motivo (más micro que macro) que explique por qué no observamos en la práctica valores de b como el anterior.

grandes (con FECUs) arrojan valores promedio de $b+z$ cercanos a uno. El paper es el documento de trabajo No. 94 del CEA.