

Capítulo 3

Consumo

Como vimos en el capítulo anterior (ver 2.1), en promedio el consumo es aproximadamente un 65 % de la demanda agregada, y la inversión en torno a un 25 %. Por lo tanto es fundamental entender el comportamiento de ambos componentes para poder entender la demanda agregada. En este capítulo y el próximo nos concentraremos en el consumo y la inversión. Posteriormente, en el capítulo 5 analizamos al gobierno. En dicho caso, sin embargo, no analizaremos los determinantes del gasto de gobierno, que para efectos prácticos supondremos es dado por el sistema político, sino su impacto en la economía, en particular en su restricción de recursos intertemporal.

El modelo de consumo más usado en macroeconomía es la conocida función keynesiana y empezaremos por ella. Sin embargo esta teoría es incompleta de modo que estudiaremos formulaciones más generales y consistentes con la teoría microeconómica.

3.1. La Función Consumo Keynesiana

La idea original de Keynes para modelar el consumo, y la que hasta el día de hoy es la más usada en modelos macroeconómicos sencillos, así como en la gran mayoría de textos básicos, es la siguiente:

$$C_t = \bar{C} + c(Y_t - T_t). \quad (3.1)$$

Donde C es el consumo, \bar{C} es una cantidad de consumo que se gasta en cada período independiente de las condiciones económicas, en particular del nivel de ingresos. El término $Y - T$ es el ingreso disponible (Y^d)¹ que tienen los individuos para consumir y ahorrar después de que con el ingreso total (Y) se han pagado los impuestos (T). Muchas veces se usa el hecho que los impuestos directos son impuestos a los ingresos, de modo que se representan como una

¹Suponiendo Transferencias $TR = 0$, de otra forma tendríamos que $Y^d = Y - T + TR$.

proporción del ingreso, por ejemplo: $T = \tau Y$. El subíndice t denota el período de tiempo t .

Al término \bar{C} también se le llama consumo autónomo. Una forma de racionalizar este consumo autónomo es como el consumo de subsistencia que cubre necesidades básicas, o alternatively un consumo mínimo que la gente incurrirá de todos modos independiente del ingreso. Tal vez este es el caso del acostumbramiento con un nivel mínimo de consumo, el cual ciertamente dependerá de la experiencia pasada consumiendo.

La función consumo se encuentra graficada en la figura 3.1.

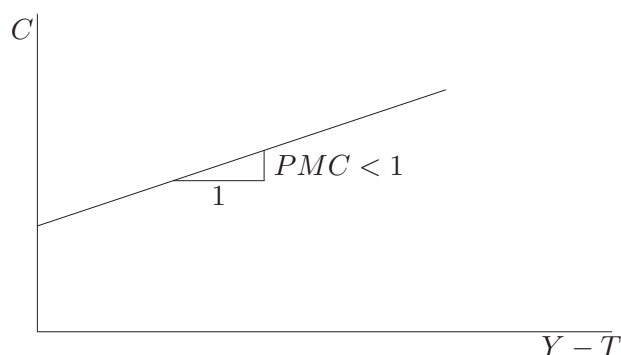


Figura 3.1: Función consumo keynesiana

Esta teoría plantea que el principal determinante del consumo en el período t es el ingreso (disponible) durante ese período.

En esta formulación lineal, el parámetro c es igual a la *propensión marginal a consumir* (PMgC), que representa cuanto aumenta el consumo si el ingreso disponible aumenta marginalmente en una unidad. El individuo usa su ingreso disponible para consumir y ahorrar, por lo tanto c es una fracción entre 0 y 1, ya que el resto se ahorra. Es decir, si el ingreso sube en \$ 1, el consumo subirá en \$ c , donde $c \in [0, 1]$.

Formalmente esto quiere decir que:

$$\text{PMgC} = c = \frac{\partial C}{\partial (Y - T)}$$

Puesto que el ingreso no consumido corresponde al ahorro de los hogares, a la fracción $1 - c$ se le llama también propensión marginal al ahorro y se denota como s .²

²Si consideramos impuestos proporcionales al ingreso, la propensión marginal al ingreso total (Y) será $c(1 - \tau)$ y la propensión al ahorro $(1 - c)(1 - \tau)$, y obviamente no suman uno sino que $1 - \tau$, ya que una fracción τ se destina al pago de impuestos.

Otro concepto importante, y bastante fácil de medir en los datos, es la *propensión media a consumir* (PMeC) y es simplemente la fracción del ingreso disponible que se usa para consumir. Es decir

$$\text{PMeC} = \frac{C}{Y - T}$$

Se puede verificar que cuando el consumo está descrito por la función keynesiana (3.1), la PMeC cae a medida que el ingreso disponible aumenta. La PMeC es $c + \bar{C}/(Y - T)$, o sea converge desde arriba hacia c .

El principal problema de esta función consumo es que si bien puede representar adecuadamente períodos relativamente largos de tiempo, puede contener muchos errores de predicción en períodos más breves. Como las autoridades económicas, así como los analistas y los mercados, desean predecir lo que ocurrirá en los próximos trimestres, esta función consumo es muchas veces incapaz de predecir adecuadamente cambios bruscos. Desde el punto de vista de tener una teoría que describa bien el mundo necesitamos explicar con fundamentos sólidos lo que determina el consumo de los hogares, y ciertamente decir que es mecánicamente el nivel de ingresos es insuficiente. Además, la evidencia internacional muestra que la propensión media al consumo no pareciera tener un movimiento secular a la baja como lo predice la ecuación keynesiana simple.

Ha sido ampliamente documentado que en algunas experiencias de estabilización, es decir, cuando se han aplicado políticas para reducir la inflación, el consumo tiende a aumentar aceleradamente, mucho más de lo que aumenta el nivel de ingreso. Por ejemplo, en la estabilización en Israel en 1985 el consumo subió por tres años en aproximadamente un 25 %, mientras el PIB lo hizo en torno a un 10 %. En algunas ocasiones, el consumo colapsa después, mientras el ingreso también se mueve moderadamente. La formulación keynesiana más simple no permite entender estos fenómenos.³

Para visualizar mejor los problemas que puede tener en el corto plazo y las virtudes en períodos más largos, se estimó una ecuación muy sencilla de consumo usando datos trimestrales entre 1986-2004 para Argentina, Brasil, Chile y México⁴. Los resultados de estas estimaciones para la propensión marginal a consumir se presentan en el cuadro 3.1. Estos valores parecen razonables y fluctúan entre 0.53 y 0.70, aunque el valor más bajo puede ser algo por debajo de los valores usualmente utilizados.

³Más antecedentes son presentados en De Gregorio, Guidotti y Végh (1998).

⁴Por disponibilidad de datos, y dado que no es un factor que explique mucho de las fluctuaciones del consumo, se consideró como determinante el ingreso nacional bruto real, sin ajuste por impuestos en el caso de Argentina, Brasil y Chile. Para México se usa PIB real. Datos más precisos pueden ser encontrados para cada país, pero aquí se ha optado por la simplicidad de datos fácilmente disponibles y en este caso se usaron los datos disponibles en la *Estadísticas Financieras Internacionales* del FMI.

Cuadro 3.1: Propensión Marginal a Consumir*

	Argentina	Brasil	Chile	México
c	0.70	0.53	0.67	0.69

*Se utilizó PNB real, y para México se utilizó PIB real.

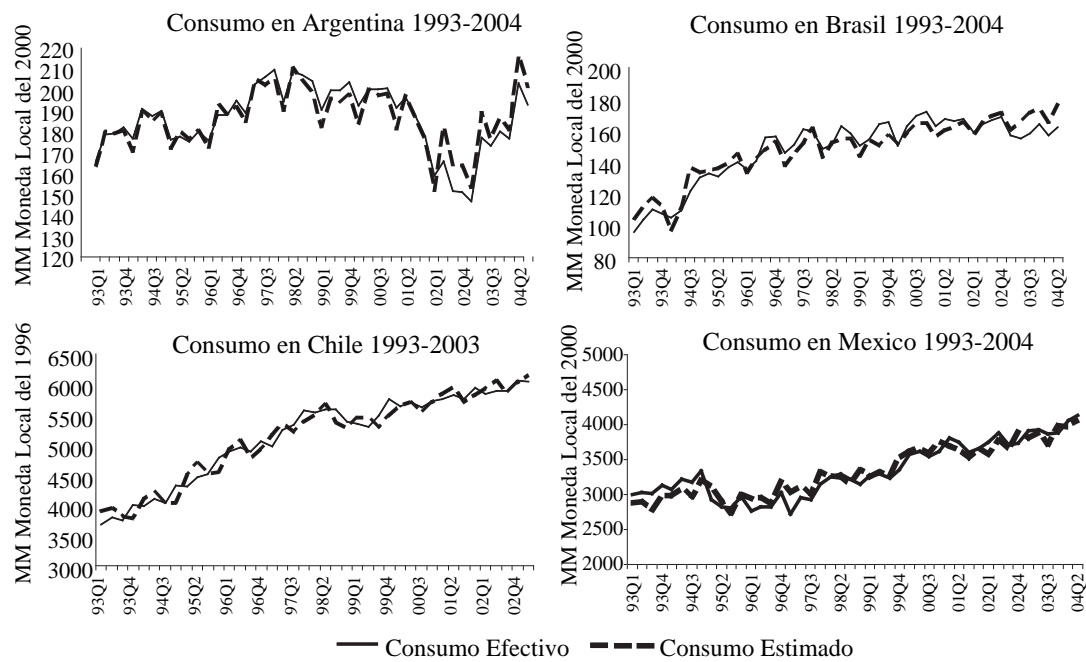
En la figura 3.2 se presenta con línea continúa el consumo efectivo y con línea punteada el consumo estimado con las regresiones. A pesar de su simpleza, estas estimaciones aparecen relativamente buenas y son capaces de seguir adecuadamente la trayectoria del consumo. Esta ecuación replica bastante bien las tendencias de mediano plazo del consumo. Sin embargo tiene serios problemas prediciendo períodos más cortos.

Por ejemplo, en la estimación para el consumo de Argentina se puede ver que entre el segundo y el cuarto trimestre del 2002, justo después del colapso de la convertibilidad, las estimaciones entregaban un consumo entre 7 %-10 % por encima del efectivo, lo que puede llegar a representar un error sustancial de entre 5 y 7 % del PIB.⁵ En el caso de Brasil, durante todo el año 1999, antes de su crisis cambiaria, el consumo estimado estuvo 3 % debajo del consumo efectivo. El caso de México también es interesante, pues previo a la crisis de “tequila” de fines de 1994, el consumo efectivo estuvo sistemáticamente 3 a 8 % por encima del consumo efectivo. Alguien podría argumentar que la función keynesiana no capturaba adecuadamente las percepciones futuras, o que este mismo consumo anómalo podría haber sido una señal de problemas. En el caso de Chile, las diferencias son menores, pero también es posible contar historias de diferencias no menores en algunos momentos especiales. Lo que en definitiva muestran estos ejercicios es que en el corto plazo ocurren fluctuaciones que una relación mecánica entre ingreso y consumo no puede capturar. Por lo tanto, al menos desde el punto de vista de explicar la realidad es necesario profundizar más en las teorías de consumo. A pesar que en los gráficos se ve un ajuste bastante bueno, una mirada más cuidadosa revela que existen discrepancias. Más aún, el hecho que dos variables, ingreso y consumo, se muevan juntas en el tiempo no dice nada respecto de la causalidad y nosotros estamos interesados no sólo en proyectar, donde la estadística sin teoría puede hacerlo bien, sino que en entender los determinantes de las variables macroeconómicas.

Ciertamente existen formas de mejorar estas predicciones, pero lo que es más importante desde el punto de vista conceptual es que esta ecuación no es una buena representación del consumo y por lo tanto debemos estudiar más si queremos entender mejor los determinantes del consumo. Eso es lo que haremos en el resto del capítulo.

⁵Más aún, estas proyecciones usan el producto efectivo, pero si uno subestima la caída, presum-

Figura 3.2: Consumo Keynesiano Estimado



Fuente: INDEC Argentina, IFS Dic 2004, Banco Central de Chile

3.2. Restricción Presupuestaria Intertemporal

La teoría keynesiana es esencialmente estática. No obstante, en la vida real la gente “planifica el consumo”. Cuando alguien se endeuda para consumir de alguna u otra forma debe considerar que en el futuro deberá pagar su deuda, para lo cual requerirá tener ingresos.

La pieza fundamental de cualquier teoría de consumo es entender la restricción presupuestaria de los individuos. Existirá una restricción presupuestaria en cada período de tiempo: el ingreso, después de pagar impuestos, se tendrá que asignar entre consumo y ahorro. Sin embargo las restricciones de cada período se relacionan entre sí. Si alguien ahorra mucho hoy, en el futuro tendrá mayores ingresos puesto que los ahorros pagan intereses. Se dice en este caso que el individuo tiene más ingresos financieros.

Una vez que conocemos la restricción presupuestaria de las personas es fácil proseguir suponiendo que un individuo determina su consumo de forma de obtener la mayor utilidad posible dado los recursos que posee.

El individuo podrá planificar su consumo sabiendo que no dispone siempre de los recursos en el momento que los necesita. Pero, si el individuo sabe que mañana va a tener los recursos puede preferir endeudarse hoy. Por el contrario, si el individuo tiene muchos recursos hoy y sabe que mañana no tendrá, le puede ser conveniente ahorrar mucho. Las teorías que veremos más adelante, la del ciclo de vida de Modigliani, y la del ingreso permanente de Friedman, tienen como piedra angular la restricción presupuestaria intertemporal de los individuos.

El primer paso para ver la restricción presupuestaria de los individuos es examinar sus ingresos. Los ingresos totales, antes de impuestos, tiene dos orígenes: ingresos del trabajo (Y_ℓ) (labor income) e ingresos financieros. Si el individuo tiene a principios del período t activos netos (depósitos en el banco, acciones, plata debajo del colchón, etc., menos deudas) por A_t y estos activos le pagan en promedio una tasa de interés r , los ingresos financieros serán rA_t . En consecuencia, los ingresos totales (Y_t) en el período t son:

$$Y_t = Y_{\ell,t} + rA_t \quad (3.2)$$

Por otra parte, el individuo gasta en consumo (C), paga impuestos (T), y acumula activos. La acumulación de activos es $A_{t+1} - A_t$, es decir parte con A_t y si sus ingresos totales más activos iniciales son mayores que el gasto en consumo más pago de impuestos, estará acumulando activos: $A_{t+1} > A_t$. La acumulación de activos es el *ahorro* del individuo. Considerando que el ingreso total debe

blemente también hubiera subestimado la caída del PIB, deteriorando aún más la predicción.

ser igual al gasto total, incluyendo la acumulación de activos, tenemos que:

$$Y_{\ell,t} + rA_t = C_t + T_t + A_{t+1} - A_t \quad (3.3)$$

La que re-escrita corresponde a:

$$A_{t+1} = Y_{\ell,t} + A_t(1+r) - C_t - T_t, \quad (3.4)$$

para todo t . Se debe notar que todas las restricciones presupuestarias están ligadas entre sí. A_t aparece en dos restricciones, una en compañía de A_{t-1} y en la otra con A_{t+1} ⁶. Esto genera una relación recursiva que relaciona todos los períodos. Por otra parte como pensaremos que los individuos miran al futuro para realizar sus decisiones de gasto resolveremos esta ecuación “hacia adelante”, donde todo el pasado a t está resumido en A_t . Los activos en t proveen toda la información relevante del pasado para el futuro. Podríamos resolver esta ecuación también hacia atrás, pero ello es irrelevante, puesto que habremos explicado como se llegó a A_t , la variable que resume completamente el pasado. Además lo que interesa es la planificación futura que hace el individuo de sus gastos, y después las empresas de sus inversiones, y para ello hay que mirar a su restricción presupuestaria en el futuro.

Reemplazando esta ecuación recursivamente, es decir escribimos (3.4) para A_{t+2} y reemplazamos A_{t+1} , llegamos a:

$$(1+r)A_t = C_t + T_t - Y_{\ell,t} + \frac{C_{t+1} + T_{t+1} - Y_{\ell,t+1}}{1+r} + \frac{A_{t+2}}{1+r},$$

ecuación en que podemos seguir sustituyendo A_{t+2} , luego A_{t+3} y así sucesivamente, para llegar a:

$$(1+r)A_t = \sum_{s=0}^N \frac{C_{t+s} + T_{t+s} - Y_{\ell,t+s}}{(1+r)^s} + \frac{A_{t+N+1}}{(1+r)^N}$$

Si la gente se muere en el período N , no tiene sentido que A_{t+N+1} sea distinto de cero, es decir, no tiene sentido guardar activos para el comienzo del período siguiente a la muerte, pues obviamente conviene más consumirlos antes.⁷ Esto no es más que el principio de la no saciación en teoría del consumidor. Entonces asumimos que $\frac{A_{t+N+1}}{(1+r)^N} = 0$.⁸ Esto dice formalmente que en

⁶Para notarlo, basta con rezagar la ecuación (3.4) en un período

⁷Una sofisticación, realista, de este análisis es suponer que los individuos se preocupen de sus hijos y por lo tanto, cuando pueden, le dejan riqueza a ellos, en esos casos A_{t+N} sería distinto de cero. Otra forma, usual en economía, de incorporar motivos altruísticos es asumir que el horizonte del individuo es infinito, es decir debido a la preocupación por sus descendientes, el individuo planificará para un período que va más allá de su horizonte de vida.

⁸Se podría pensar que este término sea menor que cero, es decir el individuo muere endeudado. Suponemos que nadie prestará en estas condiciones. Esto supone que no hay posibilidad de caer en un “esquema de Ponzi”, algo que se discute en más detalle en 5.2.

valor presente al final de la vida no quedan activos, aunque en valor corriente de dicho período no sea cero.

Finalmente, con este último supuesto, llegamos a:

$$\sum_{s=0}^N \frac{C_{t+s}}{(1+r)^s} = \sum_{s=0}^N \frac{Y_{\ell t+s} - T_{t+s}}{(1+r)^s} + (1+r)A_t \quad (3.5)$$

Se podrá reconocer que estas expresiones representan el valor presente del consumo, y de los ingresos del trabajo neto de impuesto. Por lo tanto esta última ecuación corresponde:

$$VP(\text{consumo}) = VP(\text{Ingresos netos del trabajo}) + \text{Riqueza Física}$$

donde VP denota el *valor presente* de los términos respectivos⁹.

Por último note que si el individuo “vende” todos sus ingresos futuros le pagarán una suma igual a $VP(\text{Ingresos netos del trabajo})$, y por lo tanto a este término le podemos llamar riqueza humana ya que es el valor presente de todos los ingresos del trabajo: el retorno al capital humano. Por lo tanto la restricción presupuestaria intertemporal es:

$$VP(\text{consumo}) = \text{Riqueza Humana} + \text{Riqueza Física}$$

lo que sin duda es una expresión muy simple: el valor presente del total de consumo debe ser igual a la riqueza total. No se puede consumir más allá de ello.

⁹Concepto de Valor Presente (VP): Si estamos en el tiempo cero (0) y existen flujos de recursos en períodos posteriores, debemos notar que el flujo de cada período t no tiene el mismo valor en el presente. Si consideramos una tasa de interés r constante (precio relativo entre el consumo hoy y el consumo mañana), debemos actualizar cada uno de estos flujos con esta tasa r . Una unidad del bien dejada para el siguiente período se transforma en $1+r$ unidades del bien, es decir 1 hoy es lo mismo que $1+r$ mañana. En consecuencia 1 unidad del bien mañana equivale a $1/(1+r)$ del bien hoy. De manera que para actualizar un flujo futuro, en el siguiente período, debemos dividirlo por $1+r$. Para actualizar un flujo dos períodos más adelante hay que traerlo a un período adelante, es decir $1/(1+r)$, y de ahí al presente es $1/(1+r)^2$. Por lo tanto el valor presente de una secuencia de flujos F_t está dada por:

$$VP(\text{flujos}) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{F_t}{(1+r)^t}.$$

Es fácil derivar que en el caso más general en que las tasas de interés fluctúan, donde r_t es la tasa vigente en el período t , tenemos que el valor presente está dado por:

$$VP(\text{flujos}) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{F_t}{\prod_0^t (1+r_t)}.$$

3.3. Modelo de Consumo y Ahorro en Dos Períodos

3.3.1. El modelo básico

Este es el modelo más sencillo de decisiones de consumo, y en el cual se pueden analizar una serie de temas dinámicos en macroeconomía. Para analizar las decisiones de consumo suponemos que los individuos viven dos períodos, después de los cuales el individuo muere. Su ingreso en el período 1 y 2, respectivamente, son Y_1 e Y_2 . Para pena de algunos, felicidad de otros, o simplemente para simplificar, asumimos que no hay gobierno en esta economía.

En el primer período la restricción presupuestaria es:

$$Y_1 = C_1 + S, \quad (3.6)$$

donde S representa el ahorro (si $S > 0$ el individuo ahorra, y si $S < 0$ se endeuda). Note que el individuo nace sin activos, de modo que no hay ingresos financieros en el primer período¹⁰. El individuo muere en el período 2, por lo tanto para el individuo es óptimo consumirse toda su riqueza, es decir se consume todo el ahorro en el segundo período. La restricción presupuestaria en el segundo período es:

$$C_2 = Y_2 + (1 + r)S \quad (3.7)$$

Despejando S de (3.6), que es la variable que liga las restricciones presupuestarias estáticas en cada período, y reemplazándolo en (3.7) llegamos a la restricción presupuestaria intertemporal:

$$Y_1 + \frac{Y_2}{1 + r} = C_1 + \frac{C_2}{1 + r}, \quad (3.8)$$

que es una versión simple de la restricción (3.5). En la figura 3.3 podemos ver como el individuo determina su consumo óptimo mirando al futuro, esto porque sabe que en el período 2 va a tener ingreso Y_2 , por lo tanto puede ser óptimo endeudarse en el período 1 y pagar la deuda en el período 2. El individuo tiene funciones de isoutilidad convexas y elige el consumo tal que la tasa marginal de sustitución entre dos períodos (la razón entre las utilidades marginales) sea igual a la tasa marginal de transformación ($1 +$ tasa de interés) de consumo presente por consumo futuro.

Este simple ejemplo muestra que el consumo del individuo depende del valor presente del ingreso más que del ingreso corriente. Si dependiera sólo del ingreso corriente, entonces el consumo del individuo en el período 1 no dependería de Y_2 . Sin embargo este ejemplo muestra que un aumento de X

¹⁰De acuerdo a la notación de la sección anterior $S = A_2 - A_1$, donde A_1 es cero, ya que el individuo parte su vida sin activos. Si se quisiera considerar que el individuo nace con activos es equivalente a agregárselo a su ingreso en el primer período.

en Y_1 es equivalente a un aumento de $X(1+r)$ en Y_2 . Por lo tanto podría aumentar Y_2 con Y_1 constante, pero nosotros observaríamos en los datos que C_1 aumenta. Esto no lo captura la función keynesiana tradicional.

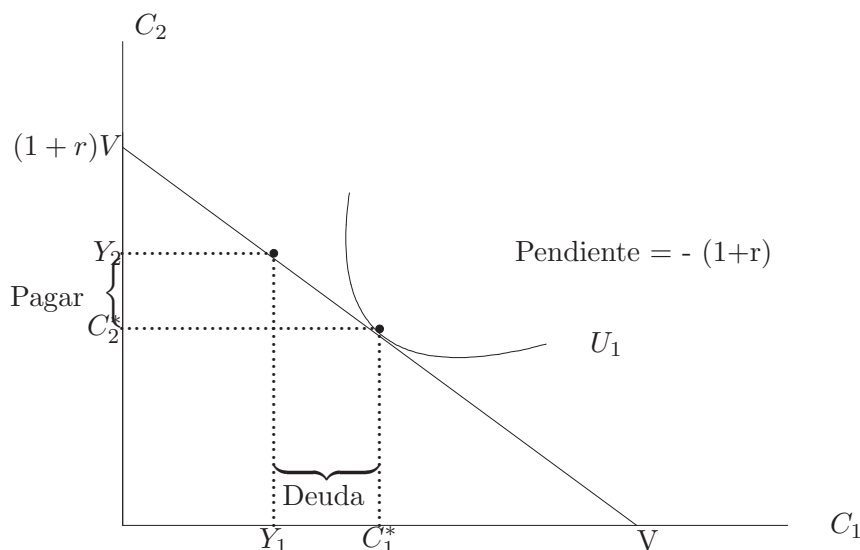


Figura 3.3: Función Utilidad del Modelo de Dos Períodos

Debido a que la función de utilidad es cóncava, el individuo prefiere consumir de forma más pareja, sin grandes saltos. Es decir, no es lo mismo consumir 20 en un período y 20 en otro; que consumir 40 en un período y cero en otro. De aquí la idea básica en todas las teorías de consumo de que el individuo intenta suavizar el consumo sobre su horizonte de planificación.

Con este modelo podemos explicar por qué el consumo crece más allá de lo “normal” después que se aplican programas de estabilización exitosos. Una potencial razón, en particular en aquellos casos en los cuales la estabilización tiene un éxito duradero, es que el público percibe que producto de un mejor ambiente macroeconómico habrá progreso y sus ingresos no sólo en el presente sino también en el futuro subirán. Esta percepción de mayor riqueza induce un aumento del consumo posiblemente más allá del aumento de consumo. Por el contrario, después de recesiones que siguen a largos períodos de expansión, como en Asia después de la crisis del 97, o México después de 1984 y Chile después de 1999, las expectativas futuras se pueden ensombrecer lo que repercute en caídas de consumo más allá de los que la evolución del ingreso predeciría.

3.3.2. Cambios en la tasa de interés

Note que la tasa de interés es un precio relativo. En la restricción presupuestaria para dos bienes, cada bien está ponderado por su precio. En este caso $1/(1+r)$ es el precio relativo del consumo en el período 2 en términos del bien del período 1 (en la restricción presupuestaria C_1 aparece con un precio unitario), o lo que es equivalente a que $1+r$ es el precio del consumo presente respecto del consumo futuro. Si $1/(1+r)$ baja, es decir la tasa de interés sube, el presente se hace relativamente más caro que el futuro (trasladar una unidad de presente a futuro produce $1+r$ en el futuro) y por lo tanto conviene trasladar consumo al futuro. Eso se hace ahorrando. De ahí que se estime en general que un aumento de la tasa de interés incentiva el ahorro. Esta conclusión, sin embargo, no es completa ya que hay que considerar la presencia de efectos ingreso. La evidencia empírica ha concluido en general, aunque siempre hay quienes discrepan de esta evidencia, que los efectos de las tasas de interés sobre el ahorro son más bien débiles.¹¹ En términos de la figura 3.3 un cambio en la tasa de interés corresponde a un cambio de pendiente de la restricción presupuestaria. Cuando r sube la restricción gira, aumentando su pendiente. La restricción de presupuesto sigue pasando por el punto $\{Y_1, Y_2\}$, pero se hace más empinada. Como se desprenderá de la figura hay efectos sustitución e ingresos que hacen incierta una respuesta definitiva.

El efecto ingreso depende de si el individuo es deudor ($S < 0$) o ahorrador ($S > 0$), también acreedor. Si un individuo no ahorra ni pide prestado, es decir su óptimo se ubica en (Y_1, Y_2) , sólo opera el efecto sustitución, con lo cual un aumento en la tasa de interés lo lleva a ahorrar, desplazando ingreso hacia el futuro.

Ahora bien, si el individuo es deudor, el efecto ingreso también lo lleva a aumentar el ahorro (reducir deuda) cuando la tasa de interés sube. Piense en el caso extremo en que sólo hay ingreso en el segundo período, el hecho que en el segundo período deberá pagar más intereses, para un ingreso dado, lo lleva a reducir su endeudamiento en el período 1.

Si el individuo es ahorrador, el aumento de la tasa de interés tiene dos efectos contrapuestos. El efecto sustitución lo lleva a desplazar consumo al período 2, pero para que ocurra este desplazamiento el individuo podría ahorrar menos ya que los retornos por el ahorro han aumentado.

3.3.3. Un caso particular interesante*

Aquí desarrollaremos analíticamente un caso de función de utilidad muy usado en la literatura y que nos permite analizar con cierto detalle el impacto

¹¹Un buen resumen de la evidencia hasta hace algunos años atrás se puede encontrar en Deaton (1992).

de las tasas de interés sobre las decisiones de consumo-ahorro. Este ejercicio más formal nos permitirá derivar la función consumo a partir de la utilidad del individuo, algo que volveremos a ver en la sección 3.7 de este capítulo, y después volveremos a usar en capítulos posteriores.

Supondremos que el individuo vive dos períodos y maximiza una función de utilidad *separable en el tiempo*:

$$\max_{C_1, C_2} u(C_1) + \frac{1}{1 + \rho} u(C_2) \quad (3.9)$$

donde ρ es la tasa de descuento. El individuo maximiza sujeto a la siguiente restricción intertemporal:

$$Y_1 + \frac{Y_2}{1 + r} = C_1 + \frac{C_2}{1 + r}. \quad (3.10)$$

La función de utilidad que usaremos es conocida como la función de aversión relativa al riesgo constante (CRRA) o de elasticidad intertemporal de sustitución constante.¹² En cada período esta utilidad está dada por:

$$\begin{aligned} u(C) &= \frac{C^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma} && \text{para } \sigma \geq 0 \text{ y } \neq 1 \\ u(C) &= \log C && \text{para } \sigma = 1. \end{aligned}$$

Más adelante demostraremos que la elasticidad intertemporal de sustitución es $1/\sigma$.¹³

La función logarítmica corresponde a la elasticidad de sustitución unitaria. Mientras más cerca de cero está σ , la elasticidad está más cerca de infinito, en consecuencia la función de utilidad se aproxima a una función lineal en consumo. La elasticidad de sustitución infinita, es decir $\sigma = 0$, es una función de utilidad lineal, y el individuo ante un pequeño cambio en la tasa de interés preferirá cambiar su patrón de consumo pues valora poco la suavización del consumo comparado a aprovechar de consumir en los períodos donde esto resulte más barato intertemporalmente. En el otro extremo, cuando σ se acerca a infinito, la elasticidad se aproxima a cero, la función corresponde a una función de utilidad de Leontief. En este caso el individuo no reaccionará a cambios en la tasa de interés, y en general sólo le interesará tener un consumo completamente plano en su vida.

¹²Esta función se usa para el análisis de decisiones bajo incertidumbre, en cuyo caso es útil verla como una función de aversión relativa al riesgo constante. Sin embargo nuestro foco es en decisiones intertemporales, por lo tanto conviene pensar en que esta función tiene una elasticidad de sustitución intertemporal constante.

¹³El -1 en la función de utilidad es irrelevante en nuestra discusión, pero en problemas más generales facilita el álgebra.

Para resolver este problema escribimos el lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \frac{C_1^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} + \frac{1}{1+\rho} \frac{C_2^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} + \lambda \left[Y_1 + \frac{Y_2}{1+r} - C_1 - \frac{C_2}{1+r} \right], \quad (3.11)$$

donde λ es el multiplicador de Lagrange y es igual a la utilidad marginal del ingreso.

Diferenciando respecto de C_1 y C_2 llegamos a las siguientes condiciones de primer orden:

$$C_1^{-\sigma} = \lambda \quad (3.12)$$

$$C_2^{-\sigma} = \lambda \left(\frac{1+\rho}{1+r} \right) \quad (3.13)$$

Combinando estas dos ecuaciones para eliminar λ llegamos a:

$$\left(\frac{C_1}{C_2} \right)^\sigma = \frac{1+\rho}{1+r}. \quad (3.14)$$

Usando esta expresión podemos calcular la elasticidad intertemporal de sustitución (EIS). Esta se define como el cambio porcentual en la razón entre el consumo en el período 2 y el consumo en el período 1 cuando cambia un uno por ciento el precio relativo del período 1. Esto es:

$$\text{EIS} = - \frac{\partial \log(C_1/C_2)}{\partial \log(1+r)}.$$

En consecuencia la EIS nos dice cuanto cambiará la composición del consumo cuando los precios cambian. Si la EIS es elevada, C_1/C_2 cambiará mucho cuando r cambie. Si la tasa de interés sube, el precio del presente aumenta, con lo cual un individuo que tenga alta preferencia por sustituir consumirá más en el futuro, con lo cual $-C_1/C_2$ sube más (C_1/C_2 cae más). Por el contrario, si la EIS es baja, C_1/C_2 cambiará poco cuando r cambia.

Tomando logaritmo a ambos lados de (3.14) y diferenciando llegamos a:

$$\text{EIS} = \frac{1}{\sigma}.$$

Para llegar a las expresiones para C_1 y C_2 reemplazamos en (3.14) la restricción presupuestaria, que no es más que derivar \mathcal{L} respecto de λ e igualar esta derivada a cero. Como lo que nos interesa es el ahorro, sólo se muestra a continuación la expresión para C_1 . Esta es:

$$C_1 = \left(Y_1 + \frac{Y_2}{1+r} \right) (1+\rho)^{1/\sigma} \left[(1+r)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} + (1+\rho)^{1/\sigma} \right]^{-1}. \quad (3.15)$$

Por otra parte sabemos que el ahorro S será:

$$S = Y_1 - C_1. \quad (3.16)$$

Por lo tanto, para determinar que pasa al ahorro frente a un cambio en r sólo basta con mirar que pasa con C_1 .

Para comenzar suponga que $Y_2 = 0$. En este caso:

$$C_1 = Y_1(1 + \rho)^{1/\sigma} \left[(1 + r)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} + (1 + \rho)^{1/\sigma} \right]^{-1}. \quad (3.17)$$

El signo del impacto de un cambio en r sobre C_1 dependerá de σ . Si $\sigma < 1$, es decir la EIS es mayor que 1, el consumo caerá con un alza en la tasa de interés, lo que significa una relación positiva entre ahorro y tasa de interés. Este es el caso donde hay suficiente sustitución intertemporal de consumo, de modo que el efecto sustitución, por el cual se reduce en consumo en el período 1 al ser más caro, domina al efecto ingreso, por el cual el ahorro disminuye ya que por la mayor tasa de interés hay que ahorrar menos para un mismo nivel de consumo en el período 2.

En cambio, cuando $\sigma > 1$, es decir la EIS es baja, domina el efecto ingreso, y un aumento en la tasa de interés reduce el ahorro (aumenta el consumo en el primer período). En el caso logarítmico, cuando $\sigma = 1$, el efecto sustitución y el efecto ingreso se cancelan.

Ahora bien, tal como lo discutimos en la subsección anterior, el efecto final depende de si el individuo tiene ahorro neto positivo o negativo el primer período. Esto se puede ver analíticamente asumiendo que Y_2 es distinto de cero. Ahora aparece un nuevo efecto y es que el ingreso en el período 2 vale menos cuando la tasa de interés sube porque es descontado a una tasa de interés más alta. Esto es el primer término en la ecuación (3.15). Este efecto lo podemos llamar efecto riqueza, porque el valor presente de los ingresos cambia. El efecto opera en la misma dirección que el efecto sustitución. En consecuencia mientras más importante es el efecto riqueza más probable es que el ahorro reaccione positivamente a un aumento de la tasa de interés, ya que el efecto riqueza y el efecto sustitución lo llevan a reducir C_1 cuando la tasa de interés sube. Este es precisamente el caso que discutimos en la subsección anterior donde planteamos que un individuo deudor es más probable que aumente el ahorro cuando aumenta la tasa de interés.

Nótese que a diferencia de la función consumo keynesiana el ingreso corriente no es lo que determina el consumo, sino que el valor presente de sus ingresos. Da lo mismo cuando se reciban los ingresos, *asumiendo que no hay restricciones al endeudamiento*. Sin embargo, para la reacción del consumo y ahorro a las tasas de interés sí importa cuando se reciben los ingresos, y la razón es simplemente que el ahorro sí depende de cuando se reciben los ingresos puesto que es el ingreso *corriente* no consumido.

Este caso especial nos ha permitido obtener resultados más precisos sobre la relación entre el ahorro y las tasas de interés. Aquí hemos podido ver que un elevado grado de sustitución intertemporal y/o un perfil de ingresos cargado hacia el futuro hacen más probable que la relación entre ahorro y tasas de interés sea positiva.

3.3.4. Restricciones de liquidez

El modelo de dos períodos es sin duda estilizado y uno se preguntará como puede la teoría keynesiana reconciliarse con un enfoque dinámico. La respuesta es que las restricciones de liquidez son la mejor forma de conciliar ambos enfoques. esto es además un supuesto muy realista. Si el individuo no puede endeudarse en el período 1, aunque sí puede ahorrar, y es un individuo que le gustaría endeudarse, así como el ejemplo presentado en la figura 3.4, no le quedará otra opción que consumir en el período 1 todo su ingreso. Si su ingreso sube en el período 1, a un nivel en que todavía la restricción de liquidez es activa, su consumo crecerá en lo mismo que el ingreso, llegando a una situación similar a la del caso keynesiano, con una propensión a consumir unitaria.

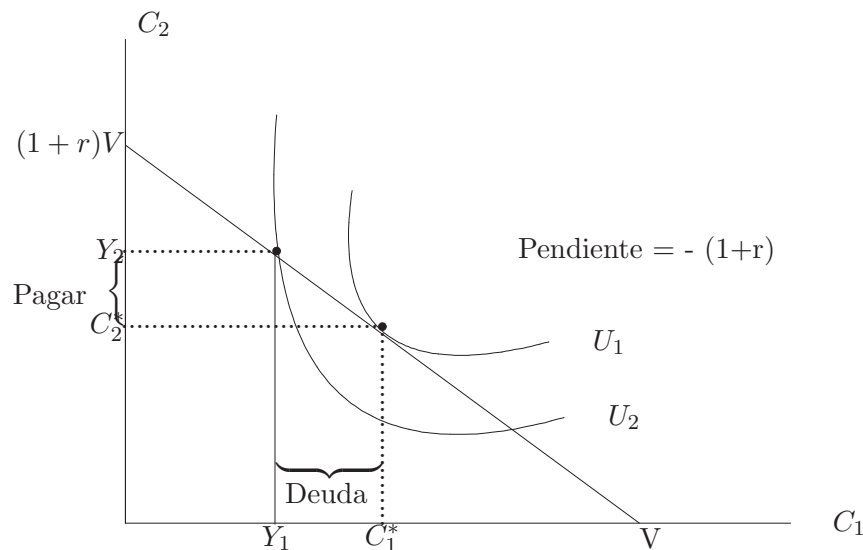


Figura 3.4: Restricciones de Liquidez

Puesto que una economía con restricciones de liquidez la gente que quiere tener ahorro negativo no lo puede hacer, el ahorro agregado en la economía con más restricciones de liquidez será mayor. Pero esto no quiere decir que esta situación sea buena ya que mucho ahorro, indeseado, implica mayor sacrificio

del consumo. De hecho, la figura 3.4 muestra que el individuo que no puede pedir prestado, en vez de alcanzar un nivel de utilidad U_1 , sólo alcanzan a U_2 , ya que su restricción presupuestaria es la misma a la del caso sin restricciones hasta el punto correspondiente a (Y_1, Y_2) donde se hace vertical, puesto que no se puede acceder a mayor consumo en el período 1.

3.4. La Teoría del Ciclo de Vida

Esta teoría, cuyo principal precursor fue Franco Modigliani¹⁴, enfatiza el hecho que cada persona cumple con un ciclo en su vida económica, en particular en lo que respecta a sus ingresos. Este ciclo de vida es: no percibe ingresos, trabaja y jubila.

En la figura 3.5 se presenta el ciclo de vida de un individuo desde el momento en que comienza a percibir ingresos. El primer aspecto que se debe destacar, y basados en el modelo de dos períodos visto previamente, es que los individuos intentan suavizar su consumo y para eso deben ahorrar y desahorrar en su ciclo de vida de manera de tener un consumo parejo. En la figura 3.5 suponemos que el individuo intenta tener un consumo parejo, a un nivel \bar{C} a lo largo de su vida.¹⁵

La trayectoria de ingresos del trabajo es la descrita en la figura, es creciente hasta alcanzar un peak, luego descender moderadamente hasta el momento de jubilación, y luego los ingresos del trabajo caen a cero después que el individuo jubila. El área A corresponde a la acumulación de deuda, ya que el ingreso va por debajo de \bar{C} . La línea recta hacia abajo muestra el total de activos, que en este caso son pasivos.

Luego el individuo comienza a recibir ingresos más elevados y en el área B comienza pagando la deuda, los pasivos se reducen hasta un punto en el cual se comienzan a acumular activos. Este ahorro es el que se gasta después de que se retira. Al final el individuo se consume todos sus ahorros y termina con cero activos.

Se supone que en la figura, si la tasa de interés es cero, el área B debería ser igual a la suma de las áreas A y C. Si hay una tasa de interés positiva la suma de los valores presentes de las áreas deberían igualar a cero.

Si el individuo quiere tener exactamente consumo igual a \bar{C} de su restricción

¹⁴Modigliani ganó el Premio Nobel de economía en 1985 por el desarrollo de esta teoría, además por sus contribuciones a finanzas, y su “Nobel Lecture” (Modigliani, 1986) es un muy buen overview de la teoría. Posteriormente, Deaton (2005) hace una revisión de las contribuciones de Modigliani a la teoría del consumo.

¹⁵Más en general deberíamos maximizar la utilidad en el tiempo del individuo, así como en el modelo de dos períodos. Sin embargo, lo importante es enfatizar que el individuo suaviza su consumo. El caso discutido aquí podemos racionalizarlo como una elasticidad intertemporal de sustitución igual a cero, bajo la cual el ahorro no reacciona ante cambios en la tasa de interés.

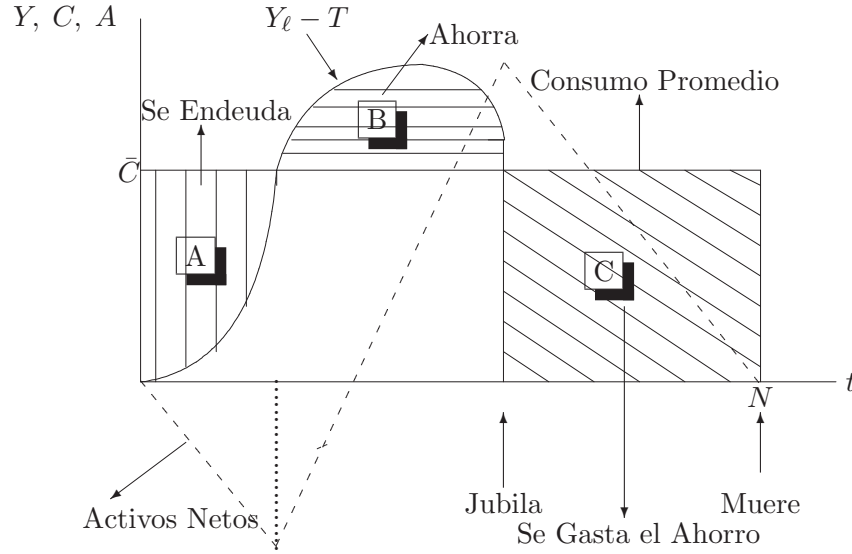


Figura 3.5: Teoría del Ciclo de Vida

presupuestaria intertemporal, dada por (3.5), podemos encontrar el valor de \bar{C} consistente con esta restricción. Este valor está dado por:¹⁶

$$\bar{C} = r \left[A_t + \sum_{s=t}^N \frac{Y_{\ell,s} - T_s}{(1+r)^{s+1}} \right] \quad (3.18)$$

El individuo irá ajustando A_t en los períodos futuros de manera de mantener el consumo constante.

Lo que la expresión anterior nos dice es que el individuo, con un horizonte suficientemente largo, para mantener el consumo parejo en cada período tendrá que consumir el “valor de anualidad” de su riqueza, que está dado por el interés real de ella. Al considerar que el horizonte es finito, el individuo irá consumiendo además del interés real, algo del stock riqueza.

Lo importante de esta teoría es que al decidir su trayectoria de consumo, la que presumiblemente es suave a lo largo de la vida, el individuo planifica tomando en cuenta toda su trayectoria de ingresos (esperados en un caso más real) futuros.

Este esquema lo podemos usar para analizar el ahorro y el consumo agregado de la economía, y así analizar el impacto de factores demográficos sobre el ahorro. Por ejemplo si suponemos que la población no crece, toda la gente

¹⁶Este valor es aproximado como si N fuera infinito, para así resolver una suma más sencilla. La expresión $\sum_{j=0}^{\infty} 1/(1+r)^j = (1+r)/r$. En cambio, $\sum_{j=0}^N 1/(1+r)^j = [(1+r)/r] - [1/r(1+r)^N]$.

tiene el mismo perfil de ingresos y la cantidad de gente en cada grupo de edad es la misma. La figura 3.5 no sólo representa la evolución del consumo en el tiempo para un individuo dado, sino que además corresponde a una fotografía de la economía en cualquier instante. En este caso en el agregado (dado que $A+C=B$) el ahorro es cero. Lo que unos ahorran otros lo desahorran o se endeudan.¹⁷ En consecuencia, aunque haya individuos ahorrando, en el neto en esta economía no se ahorra.

La implicancia es distinta cuando consideramos que la economía crece. Podemos analizar el impacto del crecimiento de la población o de la productividad. La consecuencia de esto es que la parte más joven de la distribución tiene más importancia. Esto significa que las áreas A y B serían más importantes y por lo tanto serían más grandes que el área C. En consecuencia, el crecimiento afecta al ahorro. Mientras exista un mayor crecimiento, habrá mayor ahorro, esto porque habrá más gente en el ciclo A y B de la vida que en C. Si bien A es desahorro, B es ahorro, y ambas juntas son ahorro neto, pues en la vejez hay desahorro. Lo importante es que las áreas A y B sean crecientes en el tiempo, y de esta forma quienes están en la parte de ahorro neto, ahorran más que quienes están en la etapa del desahorro. Esto puede pasar porque la población crece, o porque la productividad de las personas crece. Por el contrario, el mayor crecimiento sería el causante de las elevadas tasas de ahorro.

Debe notarse que esta teoría predice que mayor crecimiento resulta en mayor ahorro. Muchas veces, y tal como veremos más adelante con razón en la parte IV, se argumenta la causalidad en la dirección contraria, es decir mayor ahorro produce mayor crecimiento. Si alguien graficara ahorro y crecimiento vería una relación positiva. Sin embargo, esta relación puede ser bidireccional, y es importante para un análisis correcto entender que la causalidad va en las dos direcciones. Por ejemplo, hay quienes plantean que la mayor parte de esta correlación se debe al efecto ciclo de vida. Es decir la mayor parte de la correlación no justifica que aumentar el ahorro sea lo mejor para crecer.

También podemos analizar restricciones de liquidez. Una restricción de liquidez implica que se consume el ingreso mientras los agentes no se pueden endeudar ($A_t = 0$). Después el individuo comienza a ahorrar para la vejez. Puesto que en la primera parte de la vida no se endeuda, y en la medida que haya crecimiento, las restricciones de liquidez deberían, al igual que el crecimiento, aumentar el ahorro agregado en la economía, y eso es lo que en la práctica se observa.

¹⁷Para ser riguroso hay que asumir una tasa de interés igual a cero, ya que las áreas hay que sumarlas descontando por la tasa de interés.

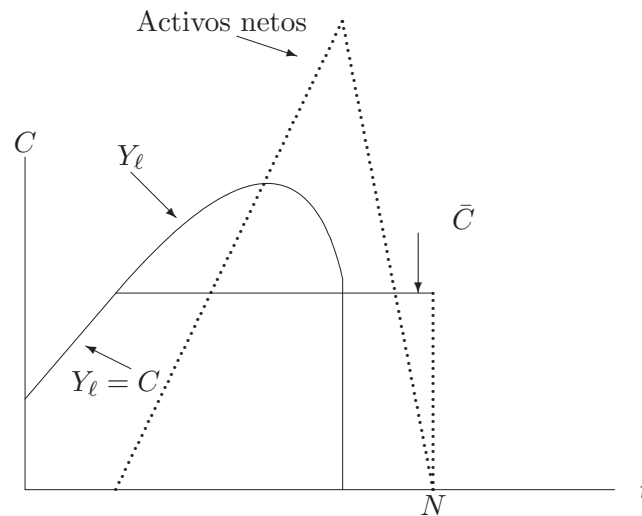


Figura 3.6: Ciclo de vida con restricciones de liquidez

3.5. Seguridad Social

Habiendo estudiado la teoría del ciclo de vida ahora podemos discutir una de las principales aplicaciones de esta teoría: la seguridad social. En particular, de los muchos componentes que tienen los sistemas de seguridad social no concentraremos en el sistema de pensiones, por el cual se permite que la gente que jubila pueda tener ingresos una vez que jubila.

Existen dos sistemas de seguridad social, aunque en la práctica los sistemas imperantes en el mundo combinan ciertos elementos de ambos.

1. *Sistema de Reparto* (pay-as-you-go). Bajo este esquema quienes están trabajando pagan impuestos que son entregados a quienes están jubilados. Se reparte la recaudación de los trabajadores entre los jubilados (lo llamaremos SR).
2. *Sistema de Capitalización Individual* (fully-funded). Bajo este esquema quienes están trabajando y recibiendo ingresos se les obliga a ahorrar en una cuenta individual que se invierte en el mercado financiero y cuyos fondos acumulados, incluido intereses, se entregan durante la jubilación (lo llamaremos SCI).

Ambos sistemas tienen diferencias e implicancias diferentes sobre la economía, pero su discusión popular está también llena de mitos.

En primer lugar es fácil darse cuenta que si los individuos ahorran de acuerdo a la teoría del ciclo de vida el SCI no tendría ningún efecto sobre la economía. Todo lo que un individuo sería obligado a ahorrar lo desahorraría voluntariamente para tener un nivel de ahorro constante. Entonces el ahorro nacional no cambiaría, salvo que el ahorro forzoso sea excesivo y la gente tenga restricción de liquidez que le impidan compensar los pagos previsionales.

En un SR las implicancias son similares, aunque hay que hacer una primera distinción importante: el retorno en el SCI es la tasa de interés de mercado, en el SR es la tasa de crecimiento de la población y de los ingresos. Si la población crece muy rápido, o el ingreso crece muy rápido, habrá pocos jubilados respecto de jóvenes y por lo tanto habrá mucho que repartir. Si suponemos que la rentabilidad del mercado de capitales es igual al crecimiento de los ingresos, de modo que en ambos esquemas el retorno es el mismo, el SR, al igual que el SCI, no tendría ningún efecto sobre el ahorro de la economía si la gente se comporta de acuerdo a la teoría del ciclo de vida.

Entonces surge una primera pregunta de por qué existe seguridad social. ¿Por qué los países crean estos sistemas obligatorios si la gente podría ahorrar por su propia voluntad? A continuación se mencionan cuatro razones que justifican la introducción de tal sistema.¹⁸

- Tal vez una de las más importante tiene que ver con un problema de inconsistencia intertemporal. Esta teoría plantea que la gente no tiene los suficientes incentivos para ahorrar para la vejez debido a que saben que si no ahorran, los gobiernos no los dejarán pasar una vejez pobres. En consecuencia, la gente sub-ahorra ante la certeza que si no tienen recursos, estos le serán provistos por el gobierno. Esta es una conducta óptima por cuanto para que se ahorra si se puede conseguir recursos adicionales sin necesidad de ahorrar. Ahora bien, ésta es una conducta inconsistente intertemporalmente.¹⁹ Aunque los jóvenes planteen que no subsidiarán a los irresponsables que no ahorran, al ver a los viejos sin ingresos, terminarán subsidiándolos en cualquier caso. Por lo tanto, para que la sociedad se proteja de esta incapacidad de cumplir con el compromiso de no apoyar a quienes no ahorran, la sociedad los obliga a ahorrar desde jóvenes para cuando jubilen.
- Otra razón que se ha dado es para resolver problemas en el mercado del trabajo. En muchos países la condición para recibir jubilación es no estar trabajando, o al menos cobrar un impuesto muy alto al jubilado que trabaja. Esto ha llevado a algunos a plantear que los sistemas de

¹⁸Para una revisión general de las teorías de seguridad social y sus implicaciones de política ver Mulligan y Sala-i-Martin (1999a,b). Ellos distinguen tres tipo de teorías, las de economía política, las de eficiencia y las narrativas.

¹⁹Para una discusión más detallada de inconsistencia temporal se encuentra en el capítulo 24.

pensiones lo que persiguen es buscar una forma de obligar, de un modo más humano, a gente que ya tiene baja productividad a retirarse de la fuerza de trabajo.

- Finalmente, siempre es posible, y hasta útil, plantear que hay una fracción de la población que es miope y por lo tanto no planifica el consumo y ahorro durante su vida como lo predice la teoría del ciclo de vida.
- Las tres razones dadas anteriormente son teorías basadas en la idea que la seguridad social introduce eficiencia en la economía. Si embargo uno también puede argumentar razones de economía política para justificar la seguridad social. Por ejemplo, los ancianos pueden ser más poderosos en el sistema político que los jóvenes y por lo tanto esto los hace a ellos decidir en favor de que haya redistribución desde los jóvenes hacia ellos.

Las razones de economía política son fundamentales para entender la evolución y distorsiones que se generan con el sistema de pensiones. Incluso si ambos sistemas tienen exactamente el mismo efecto el ahorro, algo que no necesariamente es así como se sigue discutiendo más abajo, el gran problema con los sistemas de reparto con respecto a los de capitalización individual, es que los primeros al estar los beneficios desvinculados del esfuerzo personal, distintos grupos de interés tienen incentivos para aumentar sus jubilaciones a través de redistribución. Una mirada rápida por la seguridad social por el mundo permite darse cuenta como muchos sistemas se han distorsionado a través de tener diferentes edades de jubilación por sectores, sin ninguna racionalidad para estas diferencias, o distintos de beneficios. No es sorprendente que muchas veces los trabajadores del sector público son los más beneficiados en materia de seguridad social cuando los beneficios de los sistemas no se basan en la contribución personal.

Otra ventaja de los SCI, y que explican porque muchos países se mueven en esa dirección, es que sus retornos dependen menos de variaciones demográficas y más del retorno efectivo del mercado de capitales. Mientras en EEUU los “baby-boomers” (la generación que nació después de la post-guerra cuando hubo un fuerte aumento de la población) trabajaban, los jubilados disfrutaban. Ahora que los baby-boomers empiezan a jubilar, y producto de que tuvieron pocos hijos, la seguridad social enfrenta problemas de financiamiento.

En general se argumenta que los SCI generan más inversión y permiten a las economías tener más capital que los SR. La lógica es que al ser ahorro el SCI genera más ahorro global en la economía, mientras el SR es simple traspaso de uno a otro y no genera ahorro. Hasta aquí el argumento parece perfecto. Sin embargo ignora un sólo elemento: ¿Qué hacemos con la primera generación cuando se introduce un sistema de pensiones?

Si se introduce un SCI, efectivamente los jóvenes al momento de la introducción del sistema ahorran y el ahorro global aumenta. Pero los jubilados al

momento de la introducción del sistema no recibirán ningún beneficio. Esto es equivalente a introducir un SR, cobrarle a la primera generación joven, no darle en esa primera oportunidad a los jubilados sino que ahorrarlo, y a partir de cuando esos jóvenes jubilan empezar a pagar jubilaciones. Por lo tanto, en una primera aproximación, la contribución de un SCI, en comparación a un SR, al ahorro dependerá de lo que pasa con la primera generación.

Lo mismo ocurre en la transición de un sistema a otro. Si se reemplaza un SR por un SCI, la pregunta es que hacer con los jubilados cuya jubilación ya no se financiará con impuestos de los jóvenes. En ese caso será de cargo fiscal, y probablemente por ejemplo el fisco deberá endeudarse, en exactamente lo que los jóvenes están empezando a ahorrar. O sea en vez de aumentar el capital de la economía, la deuda pública demanda esos nuevos ahorros. Por lo tanto, al pensar realistamente en cómo introducir o reformar un sistema de seguridad social, no es mecánico su efecto sobre el ahorro.

Sin embargo hay razones para pensar que habrá efectos, aunque no de la magnitud de todo lo que se ahorra en el sistema, sobre el ahorro al introducir un SCI. El principal efecto, en especial en países en desarrollo, es que el mercado de capitales se dinamiza ofreciendo nuevas oportunidades que incentivan el ahorro. Al mismo tiempo, al reducir distorsiones generadas por la economía política del SR un SCI puede también generar nuevos incentivos al ahorro.

3.6. Teoría del Ingreso Permanente

Esta teoría fue desarrollada por otro Premio Nobel, Milton Friedman quien ganó el premio en 1976, al igual que la teoría anterior se basa en el hecho que la gente desea suavizar el consumo a lo largo de la vida. Pero en vez de ver al ciclo de vida enfatiza que cuando el ingreso de los individuos cambia ellos están inciertos en si estos cambios son transitorios o permanentes. La reacción a cambios permanentes no será la misma que la reacción a cambios transitorios.

Esto es fácil de ver en el modelo de dos períodos analizado previamente. Si Y_1 sube, pero Y_2 no, el aumento del consumo será menor que si Y_1 e Y_2 suben. En el primer caso hay un aumento transitorio en el ingreso, en el segundo un aumento permanente. La explicación es simple: si el cambio es permanente el aumento del valor presente de los ingresos es mayor que cuando el cambio es transitorio.

Supongamos que un individuo desea un consumo parejo y la tasa de interés r es cero. Entonces, denotando por \bar{C} este nivel de consumo, tenemos que:²⁰

$$\bar{C} = \frac{A_t + \sum_{s=0}^N (Y_{\ell,s} - T_s)}{N} \quad (3.19)$$

²⁰Un ejercicio sencillo pero útil es derivar la esta expresión.

Si $Y_{\ell s}$ aumenta por sólo un período en x , el consumo aumentará en x/N . En cambio si el ingreso sube para siempre en x el consumo subirá en x , es decir N veces más que cuando el aumento es transitorio.

En general la gente no sabe si los cambios de ingreso son permanentes o transitorios. Una forma sencilla de ligar la función keynesiana y la teoría del ingreso permanente es suponer que la gente consume una fracción c de su ingreso permanente Y^p , es decir:

$$C_t = cY_t^p.$$

Presumiblemente c será muy cercano a 1. Por su parte, si suponemos, por ejemplo, que cuando el ingreso persiste por dos períodos es considerado permanente, pero sólo una fracción θ del ingreso corriente se considera permanente, podemos aproximar el ingreso permanente como:

$$Y_t^p = \theta Y_t + (1 - \theta)Y_{t-1}$$

es decir si el ingreso sube en t sólo una fracción $\theta \in (0, 1)$ se considera aumento permanente. Si el aumento persiste por otro período más se considera que el aumento es permanente. La función consumo entonces queda como:

$$C_t = c\theta Y_t + c(1 - \theta)Y_{t-1}$$

La propensión marginal al consumo en el corto plazo es $c\theta$ y en el largo plazo c .

El hecho que el ingreso pasado afecta al consumo presente no es porque la gente no mira al futuro para hacer sus planes, sino que a partir del pasado extrae información para predecir el futuro. En general uno podría pensar que no sólo el ingreso en $t - 1$ sino que tal vez en $t - 2$ y más atrás, se use para predecir si los cambios son permanentes o transitorios.

Podemos avanzar con más fundamentos en la formulación de la teoría del ingreso permanente siendo más precisos en la explicación de la evolución del ingreso a través del siguiente caso simplificado. Suponga un individuo que quiere un consumo parejo, no tiene activos en t , y su ingreso es constante e igual a y . En este caso, y de acuerdo a nuestra discusión previa, tendrá un consumo parejo igual a y .

Suponga que repentinamente en t el individuo recibe un ingreso $\bar{y} > y$, y prevé que su ingreso permanecerá constante en \bar{y} con probabilidad p , o se devolverá para siempre al nivel y el siguiente período con probabilidad $1 - p$.

Se denotará el valor presente de sus ingresos en caso que el ingreso permanezca alto como V_a y en el caso que el ingreso se devuelva a y como V_b . Es fácil ver, usando las ya conocidas fórmulas para la suma de factores de

descuento, que:

$$\begin{aligned} V_a &= \frac{1+r}{r} \bar{y} \\ V_b &= \bar{y} + \frac{1}{r} y. \end{aligned}$$

En consecuencia tendremos que:

$$c = \frac{r}{1+r} [pV_a + (1-p)V_b], \quad (3.20)$$

lo que lleva a:

$$c = \frac{r+p}{1+r} \bar{y} + \frac{1-p}{1+r} y. \quad (3.21)$$

Ahora bien, podemos calcular la propensión marginal a consumir en el momento que ocurre el shock de ingreso que uno deduciría de observar los datos, es decir, $(c_t - c_{t-1})/(y_t - y_{t-1})$. Dada las fórmulas para el consumo, y que en $t-1$ se tiene que consumo igual a y , restando a ambos lados y de la ecuación (3.21), y luego dividiendo por $\bar{y} - y$, tendremos que:

$$\frac{c_t - c_{t-1}}{\bar{y} - y} = \frac{r+p}{1+r}. \quad (3.22)$$

Es decir la propensión a consumir será creciente en p , es decir en cuan permanente es el cambio de ingresos. Si $p = 0$, la propensión será muy baja, con una tasa de interés de 5 % se tendrá que es cercana a 0.05, es decir aproximadamente la tasa de interés. Es decir, el individuo convierte este ingreso extra en una anualidad. Si, en cambio $p = 1$ la propensión a consumir será 1 ya que aumentó su ingreso permanente.

Podemos extender este análisis y preguntarnos que pasaría si el shock de ingreso trajera muy buenas noticias. Por ejemplo, después del aumento del ingreso el individuo espera que con probabilidad p que se mantenga en \bar{y} , y con $1-p$ suba aún más, por ejemplo a \check{y} , tal que $\check{y} > \bar{y}$. Es decir el ingreso esperado el siguiente período subirá por encima de \bar{y} . El lector podrá verificarlo, pero ciertamente el consumo en t subirá más que lo que sube el ingreso, con una propensión mayor que uno. Esto demuestra que la propensión a consumir depende básicamente de lo que los shocks al ingreso indican sobre lo que será la evolución futura de ellos. En este ejemplo mostramos que el consumo podría ser incluso más volátil que el ingreso, algo en principio no contemplado en las versiones más simples de la teoría, pero que podría explicar por qué después de las estabilizaciones exitosas, o de un período de reformas económicas exitosas, se puede producir un boom de consumo difícil de explicar con funciones de consumo keynesianas tradicionales.

Cabe destacar finalmente, que la teoría del ingreso permanente y la del ciclo de vida no son alternativas sino más bien complementarias. Por ello en muchos casos se habla de la teoría del ciclo de vida/ingreso permanente (CV/IP), pues ambas pueden ser derivadas de la conducta de un individuo que maximiza la utilidad del consumo a lo largo de su vida. La teoría del ciclo de vida enfatiza la trayectoria del ingreso en distintas etapas de la vida del individuo, mientras la del ingreso permanente enfatiza los shocks al ingreso, sean ellos permanente o transitorios.

3.7. Consumo, Incertidumbre y Precios de Activos*

La teoría del consumo es ampliamente usada en teoría de finanzas. Esto es natural, puesto que los individuos son quienes demandan activos financieros para ahorrar y pedir prestado. Ellos también escogen distintos activos de acuerdo a sus necesidades para cubrir riesgos, es decir usan el mercado financiero para asegurarse y tener un perfil suave de consumo cuando tienen un perfil variable de ingresos. En consecuencia, a partir de la teoría del consumo uno podría explicar los precios de los activos, que es lo que los individuos están dispuestos a pagar por cierta combinación de riesgo y retorno. En esta sección comenzaremos con el modelo más simple de consumo y sus implicaciones estocásticas (o aleatorias), para luego discutir la determinación de los precios de los activos. A este respecto se analizarán dos temas importantes. El primero es el “equity premium puzzle” (puzzle de premio de las acciones) y el segundo es el modelo CAPM (“Capital Asset Pricing Model”) de precios de activos. Muchos de los resultados discutidos en esta sección son sujetos de intensa investigación empírica, y como es de esperar, se han encontrado debilidades importantes. Por esta razón, ha habido también importantes estudios generalizando y refinando las características de la función de utilidad de los individuos y características de la economía que permitan mejorar el poder explicativo de la teoría del consumo. Los resultados no son definitivos, y la existencia de restricciones de liquidez siguen siendo un muy buen candidato para explicar las anomalías.

3.7.1. Implicaciones estocásticas de la teoría del consumo

En un clásico trabajo, Robert Hall (1978), demuestra que, bajo ciertas condiciones, la teoría del CV/IP implica que el consumo debería seguir un *camino aleatorio*, proceso que será descrito más adelante. Para demostrar esto usaremos un modelo de consumo óptimo en dos períodos, fácilmente generalizable a horizontes más largos, donde hay incertidumbre.

Considere el mismo problema de la sección 3.3.3, pero donde el ingreso del segundo período es incierto (se puede decir también aleatorio o estocástico).

Supondremos que el individuo toma su decisión en t para t y $t + 1$. Es decir debe resolver el siguiente problema:

$$\max_{C_t, C_{t+1}} u(C_t) + \frac{1}{1 + \rho} E_t u(C_{t+1}) \quad (3.23)$$

donde ρ es la tasa de descuento. El individuo maximiza el valor esperado de la utilidad en el siguiente período. El valor esperado se toma basado en toda la información acumulada al período t . En consecuencia E_t corresponde al valor esperado condicional a toda la información disponible en t . Esta notación nos acompañara a lo largo del libro cuando tomamos expectativas. Estas corresponden a las *expectativas racionales* pues se toman con toda la información disponible en t . El individuo maximiza la utilidad esperada sujeto a las siguiente restricción presupuestaria intertemporal:

$$Y_t + \frac{Y_{t+1}}{1 + r} = C_t + \frac{C_{t+1}}{1 + r}.$$

Usando esta restricción y reemplazando C_{t+1} en la función de utilidad tenemos que el individuo maximiza la siguiente expresión:²¹

$$u(C_t) + \frac{1}{1 + \rho} E_t u(Y_{t+1} + (1 + r)(Y_t - C_t)). \quad (3.24)$$

La condición de primer orden de este problema es:

$$u'(C_t) = \frac{1 + r}{1 + \rho} E_t u'(C_{t+1}). \quad (3.25)$$

Hemos sacado r fuera del valor esperado ya que es una tasa libre de riesgo.

Ahora bien, si suponemos que $r = \rho$ y al mismo tiempo que la función de utilidad es cuadrática, donde $u(C) = -(\bar{C} - C)^2$, se llega a:²²

$$C_t = E_t C_{t+1}.$$

Es decir el consumo en valor esperado en el segundo período es igual al consumo cierto del primer período. Puesto que el valor esperado ha sido tomando en consideración toda la información disponible en t , el único origen de desviaciones serán shocks inesperados al consumo, es decir $C_{t+1} = E_t C_{t+1} + \xi_{t+1}$,

²¹Se puede maximizar con las dos restricciones y después despejar para el multiplicador de Lagrange como se hizo en la sección 3.3.3. El resultado es exactamente el mismo. La condición de primer orden es la misma que en horizonte infinito, pero visto en dos períodos es más simple de resolver.

²²El parámetro \bar{C} es algo así como consumo de máxima felicidad ("bliss point"), y se postula para asegurar que $u' > 0$ y $u'' < 0$. No se puede suponer que la utilidad es $u(C) = C^2$ puesto que esta utilidad es convexa ($u'' > 0$) y por lo tanto el individuo no suavizaría consumo.

donde el valor esperado en t de ξ_{t+1} es cero. En consecuencia la condición de primer orden implica que:

$$C_{t+1} = C_t + \xi_{t+1}, \quad (3.26)$$

es decir C sigue un camino aleatorio (“random walk”).²³ La característica importante de este proceso es que todos los shocks al consumo tienen efectos permanente, es decir no se deshacen. En otras palabras si $C_{t+1} = \delta C_t + \xi_t$, con $\delta < 1$, es decir es un proceso autorregresivo de orden 1, un shock tendrá efectos transitorios. Si el shock es unitario, C_{t+1} sube en 1, luego C_{t+2} sube en δ , C_{t+3} en δ^2 , y así sucesivamente hasta que en el futuro distante C el efecto del shock desaparece. Pero cuando δ es igual a uno, es decir el proceso es un camino aleatorio, un shock unitario al consumo, lo elevará en uno desde que ocurre el shock en adelante, sin deshacerse. Es decir, los shocks tienen efectos permanentes.

Este resultado se puede generalizar más allá de la utilidad cuadrática. Lo importante de este resultado es que un individuo que en ausencia de incertidumbre tendría su consumo parejo, bajo incertidumbre el cambio de consumo de período a período no es predecible por cuanto sólo cambia producto de las noticias que se reciben en cada período, y estos cambios son permanentes.

La evidencia rechaza que el consumo siga un camino aleatorio. Una ruta más general para verificar empíricamente la validez de la teoría del CV/IP es estimar en los datos si se cumple la condición de primer orden (3.25). Esto envuelve métodos estadísticos más sofisticado que regresiones lineales simples, pero es posible recuperar parámetros de la función de utilidad. Por ejemplo si suponemos la función de utilidad CRRA descrita en 3.3.3, tenemos que la condición de primer orden es:

$$C_t^{-\sigma} = \frac{1+r}{1+\rho} E_t C_{t+1}^{-\sigma}. \quad (3.27)$$

De donde podríamos estimar la elasticidad intertemporal de sustitución ($1/\sigma$).

3.7.2. Precios de activos, el modelo CAPM y el puzzle del premio de las acciones

Suponga ahora que el individuo tiene acceso a comprar un activo i con retorno incierto igual a r^i . En este caso la condición de primer orden es:

$$u'(C_t) = E_t \left[\frac{1+r^i}{1+\rho} u'(C_{t+1}) \right]. \quad (3.28)$$

²³En rigor este proceso es una “martingala”, que no es más que un caso más general de camino aleatorio ya que basta que el error sea no correlacionado serialmente y con media cero, pero no impone restricciones sobre la varianza, que en el caso del camino aleatorio es constante. Aquí sacrificamos un poco de rigor para adaptarnos al uso común de las expresiones y no ocupar mucho tiempo en detalles técnicos.

No podemos sacar el término $1 + r^i$ del valor esperado, pues es incierto.

A la expresión $u'(C_{t+1})/[(1 + \rho)u'(C_t)]$ se le conoce como el *factor de descuento estocástico* y lo denotaremos por M . En el caso de la tasa libre de riesgo, la condición de primer orden es $E_t M = 1/(1 + r)$. El término $1/(1 + r)$ es el factor de descuento, cierto cuando r es libre de riesgo, entonces M es un factor de descuento basado en la conducta óptima del consumidor, y además es estocástico.

La condición de primer orden cuando el individuo compra un activo con retorno incierto i es:

$$E_t[(1 + r^i)M] = E_t M + E_t r^i M = 1.$$

Dado que el valor esperado de una multiplicación de variables aleatorias es igual al producto de sus esperanzas menos la covarianza, la expresión anterior es igual a:²⁴

$$E_t M + E_t r^i M = E_t M - E_t r^i E_t M + \text{Cov}(r^i, M) = 1$$

Esta condición se debe cumplir para todos los activos, entre otros el libre de riesgo:

$$(1 + r)E_t M = E_t M + rE_t M = 1.$$

Combinando las dos últimas expresiones (igualando los dos términos del medio), tendremos que el diferencial de tasas, conocido también como *exceso de retorno* estará dado por:

$$E_t r^i - r = -\frac{\text{Cov}(r^i, M)}{E_t M} = -\frac{\text{Cov}(r^i, u'(C_{t+1}))}{E_t u'(C_{t+1})}. \quad (3.29)$$

Donde el último término se obtiene de simplificar el numerador y denominador por $1 + \rho$ y $u'(C_t)$ que se pueden sacar de los valores esperados ya que son variables ciertas. Esta expresión nos permite derivar de la teoría de consumo el premio de un activo riesgoso por sobre el activo libre de riesgo. Si la covarianza del retorno y la utilidad marginal del consumo es negativa, entonces el premio (o prima) del activo será positivo. Dado que la utilidad marginal es decreciente en el consumo, de aquí podemos concluir que *cuando el retorno de un activo covaría positivamente con el consumo requerirá pagar un premio positivo*. La razón de esto es que si un activo paga más cuando el consumo es alto, no provee seguro contra caídas del ingreso por lo tanto los consumidores estarán dispuestos a mantenerlo en su portafolio solo si provee un buen retorno. Es decir este activo requerirá de una prima por riesgo por sobre el retorno de un activo libre de riesgo.

²⁴Esto es consecuencia que la covarianza entre X e Y se define como: $\text{Cov}(X, Y) = EXY - E X E Y$.

Por otro lado, un activo que da un retorno alto cuando el consumo es bajo, es decir la covarianza entre la utilidad marginal y el consumo es positiva, tendrá un retorno menor al retorno libre de riesgo, porque además de servir como vehículo de ahorro, dicho activo provee también un seguro para los malos tiempos.

De la ecuación (3.29) podemos encontrar cuánto debería ser el precio de un activo cualquiera respecto de la tasa libre de riesgo. Para operacionalizar más esta relación la teoría de finanzas ha propuesto el CAPM, que aquí lo explicaremos a partir de la teoría del consumo.²⁵ Suponga que existe un activo cuyo retorno, r^m , está perfectamente correlacionado negativamente con la utilidad marginal del consumo, es decir $r^m = -\theta u'(C_{t+1})$. Podemos pensar que este activo es un portafolio que tiene todos los activos existentes en la economía, es decir la cartera (o portafolio) del mercado. En consecuencia la covarianza entre r^m y $u'(C_{t+1})$ será igual a la varianza de r^m , ($\text{Var}(r^m)$), dividido por $-\theta$, lo que implica que tendrá un exceso de retorno positivo con respecto a la tasa libre de riesgo. Por su parte, la covarianza de un activo cualquiera con retorno r^i y $u'(C_{t+1})$ será igual a la covarianza de r^i y r^m dividido por $-\theta$. En la práctica se usa el retorno del mercado accionario como r^m . Es necesario destacar en todo caso que el retorno de las acciones está positivamente correlacionado con el consumo, pero la correlación es más cercana a 0.4 en el caso de EEUU (Campbell, 2003).

Usando la ecuación (3.29) para el activo i y el portafolio de mercado tendremos la siguiente relación:

$$Er^i - r = \beta^i (Er^m - r), \quad (3.30)$$

donde

$$\beta^i = \frac{\text{Cov}(r^i, r^m)}{\text{Var}(r^m)}. \quad (3.31)$$

A la ecuación (3.30) se le conoce como la ecuación de precios de activos del CAPM. Si un activo varía igual que el mercado, su retorno debiera ser el mismo. Si covaría positivamente con el mercado, pero es más volátil, su retorno debiera ser mayor que el del mercado, y si covaría negativamente su retorno será menor pues sirve para cubrir las fluctuaciones del mercado, permitiendo estabilizar los retornos respecto de las variaciones del mercado. Además, como discutimos anteriormente el retorno de este activo estará negativamente correlacionado con el consumo, y por lo tanto los individuos estarán dispuestos a recibir un retorno menor. En finanzas, es usual referirse a los β 's de los distintos activos, y se puede estimar escribiendo (3.30) en forma de regresión.²⁶

²⁵Para más detalles ver Blanchard y Fischer (1989), cap. 10.1.

²⁶En finanzas se habla de β 's de mercado, que son los que comparan correlaciones entre los retornos, y los β 's de consumo, que son aquellos donde se correlaciona el retorno de un activo con el consumo directamente, más precisamente con C_{t+1}/C_t .

La ecuación (3.29) puede desarrollarse más, haciendo algunos supuestos sobre la distribución del crecimiento del consumo y la función de utilidad. Así es posible estimar el exceso de retorno del mercado accionario respecto de la tasa libre de riesgo predicho por la teoría. Este ejercicio fue realizado en un estudio ya clásico realizado por Mehra y Prescott (1985). Usando una función CRRA Mehra y Prescott (1985) plantean que el premio del mercado accionario es muy elevado. En los Estados Unidos, entre 1889 y 1978 la tasa libre de riesgo (bonos del tesoro de 3 meses en la actualidad) es de 0,8 %, mientras el retorno del mercado accionario fue de 6,98 %, lo que da un premio, o retorno en exceso, de 6,18 %. Calibrando la ecuación de acuerdo a parámetros razonables daría una prima de 1,4 %, muy inferior al 7 % encontrado en los datos. Esto es lo que se conoce como el *equity premium puzzle*. Para ser consistente con la teoría se requeriría un coeficiente de aversión al riesgo muy alto, lo que no es consistente con la evidencia empírica. Este retorno excesivo se ha mantenido en el tiempo y en otros países.²⁷

Los problemas encontrados para explicar los precios de los activos, así como otras dificultades para explicar y comprobar las teoría de consumo, ha llevado a muchas investigaciones proponiendo funciones de utilidad que, con el costo de mayor complejidad, puedan explicar mejor la realidad.

Uno de los principales problemas es con la separabilidad de la función consumo, ya que hemos supuesto que la utilidad es $u(C)$, cuando puede tener más argumentos que no podemos tratar separadamente.²⁸ Algunas formas de romper con la separabilidad es considerar el consumo de bienes durables. En este caso comprar un durable hoy provee utilidad por muchos períodos. También se ha propuesto la importancia de los hábitos. En este caso la utilidad no depende del consumo presente, sino que del consumo presente respecto del consumo pasado, por ejemplo, el argumento de u podría ser $C_t - \gamma C_{t-1}$ donde γ es mayor que cero y menor que uno. En este caso el consumo presente vale más si el pasado fue bajo.

Otras modificaciones a la función de utilidad han intentado separar actitud frente al riesgo de la preferencia por sustituir intertemporalmente. En el caso de la función CRRA la aversión al riesgo es σ y la EIS es $1/\sigma$. Ciertamente no podemos suponer elevada sustitución intertemporal y alta aversión al riesgo. Es posible efectuar esta separación a costa de tener una función de utilidad más compleja. Asimismo, se ha planteado la idea que el factor de descuento sea variable.

Cabe por último destacar que no sólo cambiando la función consumo podemos entender mejor su evolución, sino que también por otras características de la economía. A este respecto caben destacar dos: la primera y que se nos ha

²⁷Para más detalles ver Campbell (2003), y en especial Cochrane (2005) caps. 1 y 21.

²⁸Para mayor discusión ver Attanasio (1999).

repetido sistemáticamente son las restricciones de liquidez, es decir la incapacidad de los consumidores de pedir prestado para suavizar consumo. Esto los obliga a ahorrar para tiempos malos, lo que entre otras cosas afectará el precio de los activos. Segundo, la heterogeneidad de los consumidores. Hasta ahora hemos trabajado con el consumidor, u hogar, representativo. Trabajar con heterogeneidad, aunque analíticamente mucha más complejo, también nos puede ayudar a entender mejor el consumo. Ya vimos, por ejemplo, que factores demográficos pueden ser importantes a la hora de explicar las diferencias en las tasas de ahorro entre países.

3.8. Problemas

1. **Paralelismo del Consumo e Ingreso** Unos economistas graficaron la tasa de crecimiento del ingreso (γ_y) versus la tasa de crecimiento del consumo (γ_c) para 15 países de la OECD entre 1960 y 1985. Los resultados obtenidos fueron:²⁹

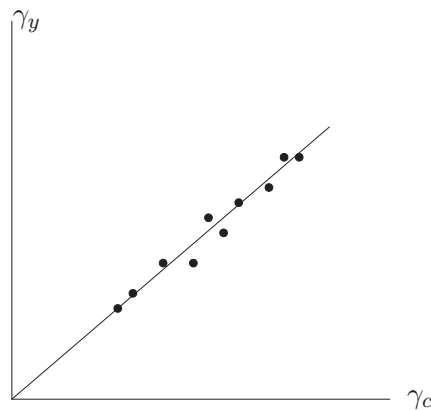


Figura P3.1: Crecimiento del ingreso versus crecimiento consumo

Sin hacer ningún calculo, ni pensar que el ahorro afecta al crecimiento, discuta si los datos son consistentes o inconsistentes con las teorías del Ciclo de Vida de Modigliani y Ingreso Permanente de Friedman. ¿Qué piensa usted debería ser la predicción de dichas teorías?

2. **Ciclos de Auge y Recesión** En una economía sólo se producen manzanas, un bien cuyo precio (real) internacional es estable.

²⁹ Este ejercicio es basado en Carroll y Summers (1989).

Se estima que en los próximos siete años de cosechas excepcionalmente buenas, seguidos de siete años con cosechas particularmente malas (y luego las cosechas se normalizarán). La producción *promedio* de manzanas durante los catorce años será la misma que antes y después de este período.

- a) ¿Qué le puedes aconsejar a esta economía basado en el resultado de *suavizamiento del consumo*? Suponga que este país no afecta el precio mundial de las manzanas y que además puede ahorrar en el extranjero a una tasa de interés (real) positiva.
- b) Determine si el estándar de vida mejorará después del período de catorce años, comparado con el período anterior al sueño del presidente.
- c) ¿Cómo cambia su respuesta a la parte (b) si la tasa de interés real es cero?
- d) ¿Cómo cambia su respuesta a la parte (b) si la producción de manzanas de esta economía afecta el precio mundial de las manzanas?

3. **Seguridad social.** Considere una economía donde todos los agentes se comportan de acuerdo a la teoría del ciclo de vida o del ingreso permanente. Suponga que el gobierno obliga a todos a ahorrar una fracción de su ingreso (que se llama cotización previsional). Cuál cree usted que será el efecto sobre el ahorro (comparado con el caso donde a nadie se le exige ahorrar) de la economía en las siguientes situaciones:

- a) Todos los agentes tienen pleno acceso al mercado financiero y puede pedir prestado o ahorrar todo lo que quieran a una tasa de interés dada (igual a la del retorno del fondo de pensiones).
- b) Hay una fracción importante de agentes (jóvenes), que no pueden pedir prestado todo lo que quisieran.
- c) En el caso anterior, cómo podría variar su respuesta si los padres se preocupan por el bienestar de sus hijos y les pueden transferir recursos mientras están vivos (o sea pueden transferir no sólo a través de la posible herencia).
- d) Considere ahora el siguiente supuesto sobre el comportamiento de las personas: cuando llegan a la edad de jubilar y dejan de trabajar, ellos *saben* que el gobierno no los dejará morir de hambre y les proveerá transferencias en caso de no tener ingresos. Suponga en este contexto que el gobierno obliga a la gente a ahorrar y les entrega la plata sólo cuando jubilan. ¿Qué cree usted que pasa con el ahorro?. ¿Le parece esta una racionalización útil para justificar la existencia de un sistema de pensiones?

4. **Relación entre ahorro presente e ingreso futuro** La evidencia indica que frecuentemente a continuación de un período en que el ahorro es bajo viene un período en que los ingresos son altos. En este problema usamos la teoría racional del consumo para explicar este fenómeno.

Considere un consumidor que vive dos períodos, con función de utilidad $U(c_1, c_2)$, donde c_1 y c_2 denotan consumo en el primer y segundo período, respectivamente.³⁰ Los ingresos en los períodos 1 y 2 son y_1 y y_2 , respectivamente, y el ahorro correspondiente es $s_1 \equiv y_1 - c_1$ y $s_2 \equiv y_2 - c_2$. Finalmente suponemos que el consumidor puede endeudarse y ahorrar a una tasa r y que no deja herencia.

- ¿Puede la función Keynesiana de consumo explicar el fenómeno observado? Justifique cuidadosamente.
 - Muestre gráficamente los niveles óptimos de consumo que el individuo elegirá en cada período para valores dados (positivos) de y_1 y y_2 , donde le sugerimos tomar y_1 mucho *mayor* que y_2 , de modo que en el primer período haya ahorro y no endeudamiento. Indique en la figura el ahorro en el primer período.
 - Manteniendo y_1 fijo, incremente y_2 y vuelva a determinar el ahorro durante el primer período. Le sugerimos mostrar el ahorro antes y después del aumento de ingreso en *la misma* figura. Concluya que mientras mayor es el ingreso futuro que espera el consumidor, menor será su tasa de ahorro corriente.
 - Argumenta claramente por qué su derivación gráfica no depende de su particular elección de y_1 , y_2 , r , y $U(c_1, c_2)$.
5. **Mas Consumo Intertemporal** Considere una persona que vive dos periodos, t y $t + 1$, y sus ingresos son de 100 y 150 respectivamente. Si la tasa de interés es del 15 %:
- Determine la restricción presupuestaria de este individuo y gráfiquela.
 - Suponga que a esta persona le interesa tener el mismo ingreso en ambos períodos, es decir, un ingreso permanente a lo largo de su vida. Encuentre el valor de éste.
 - Si las preferencias de este individuo son tales que desea consumir el doble de el primer período t en el período $t + 1$. Identifique el consumo en t y $t + 1$.

³⁰Las curvas de indiferencia (en el plano (c_1, c_2)) tienen forma convexa. Además el consumo en ambos períodos es un bien normal.

- d) Explique conceptual y matemáticamente que ocurre con el consumo de cada período si la tasa de interés aumenta a 20 %. Las preferencias de consumo del individuo se mantienen como en la parte c.
- e) Identifique en un mismo gráfico los resultados obtenidos en la parte b y c y explique los cambios ocurridos en consumo debido a las variaciones de la tasa de interés.
- f) Suponga ahora que el gobierno ha instaurado un nuevo impuesto de suma fija de 50 en cada período. Encuentre la nueva restricción presupuestaria considerando la tasa del 15 % y grafique.
- g) Si la estructura de impuesto se mantiene de igual forma y el individuo desea consumir 40 en el primer período.
 - i. ¿Cuál es el consumo en $t + 1$?
 - ii. ¿Cómo cambia la recta presupuestaria si los impuestos cambian de estructura y se cobra 60 en t y 40 en $t + 1$?
 - iii. ¿Cómo cambia el consumo en ambos periods?

6. **Consumo y Restricciones de Liquidez** Considere un consumidor que vive dos períodos y cuyas preferencias son representadas por una función de utilidad $U(c_1, c_2)$, donde c_1 y c_2 denotan consumo en el primer y segundo período, respectivamente, y la utilidad no es necesariamente separable.

Los ingresos del consumidor en los períodos 1 y 2 son y_1 y y_2 , respectivamente, y no hay incertidumbre.

El consumidor puede endeudarse a una tasa r_D y puede ahorrar a una tasa r_A , con $r_A < r_D$.

- a) Dibuje la restricción presupuestaria del consumidor en el plano (c_1, c_2) . Concluya que esta se compone de dos rectas e identifique la pendiente de cada una de ellas.
- b) Determine condiciones necesarias y suficientes para que la trayectoria de consumo óptima sea (y_1, y_2) . Estas condiciones debieran ser dos desigualdades en términos de la función $u(c_1, c_2)$ y sus derivadas parciales evaluadas en (y_1, y_2) y ambas tasas de interés.
- c) ¿En qué se traducen las condiciones de la parte anterior cuando $u(c_1, c_2)$ es aditivamente separable?
- d) Considere las condiciones de desigualdad derivadas en la parte (b) y suponga ahora que estas desigualdades se cumplen estrictamente. Muestre (gráficamente) que si y_1 aumenta en una cantidad pequeña, Δy_1 , entonces $\Delta c_1 / \Delta y_1 = 1$ y $\Delta c_2 / \Delta y_1 = 0$, lo cual es mucho más

cercano a lo que predice la función de consumo Keynesiana que lo que se infiere de las teorías racionales del consumo.

- e) Notando que la brecha entre r_D y r_A es mayor en países en desarrollo (indique al menos un motivo micro explicando esto) discuta, utilizando sus resultados de las partes anteriores, si las restricciones de liquidez son más relevantes en países en desarrollo o países industrializados.
- f) Notando que el caso de restricción total de liquidez (no hay acceso a crédito) corresponde a $r_D = +\infty$, vuelva a responder las partes anteriores para este caso.

7. **Ahorro y crecimiento.** Considere un individuo que vive por tres períodos. Sus ingresos son: en el primer período $y_1 = y$, en el segundo período el ingreso crece a una tasa γ , es decir $y_2 = y(1 + \gamma)$. Finalmente, en el período 3 se jubila y no tiene ingresos, o sea $y_3 = 0$. La tasa de interés en la economía es cero. Por otra parte su utilidad es tal que siempre querrá un consumo parejo durante toda su vida (es decir $c_1 = c_2 = c_3$).

- a) Calcule el consumo y ahorro (s_1 , s_2 y s_3) en cada período.
- b) Suponga que en esta economía no hay crecimiento de la población. Tampoco crecen los ingresos entre generaciones. ¿Qué pasa con el ahorro agregado en cada momento del tiempo? Interprete su resultado.
- c) Suponga que se introduce un sistema de pensiones donde se le obliga a cada individuo joven y en edad media a ahorrar una magnitud A , y le devuelven $2A$ cuando viejo. ¿Qué pasa con el ahorro de los individuos? ¿Tiene alguna implicancia sobre el ahorro o la conducta de los individuos la introducción de un sistema de seguridad social?
- d) Suponga que la población crece a una tasa n . Calcule el ahorro agregado de la economía (cuide de ponderar adecuadamente el ahorro de cada generación).
- e) ¿Cuál es la tasa de crecimiento del ingreso agregado en esta economía? Muestre cómo varía (sube o baja) el ahorro agregado con un aumento en la tasa de crecimiento de esta economía. Interprete su resultado, y compárelo con el obtenido en b).
- f) Suponga que esta economía es una buena descripción del mundo y un economista grafica las tasas de ahorro versus las tasas de crecimiento de todas las economías. Después de ver el gráfico concluye: “La evidencia apoya definitivamente la idea que para crecer más hay que ahorrar más”. Comente esta conclusión en dos dimensiones: ¿es cierto lo que ve en los datos? ¿De ser así es correcta la conclusión?.

Capítulo 4

Inversión

Como ya se definió anteriormente, la inversión corresponde a la acumulación de capital físico. El aumento en la cantidad de máquinas, edificios u otros, de una empresa corresponde a inversión. Lo mismo ocurre con el aumento de los inventarios. Por lo tanto para analizarla debemos en primer lugar preguntarnos que es lo que determina la cantidad de capital que una empresa desea tener, y posteriormente como se acerca a ese capital deseado: se hace en un instante o lo hace gradualmente. Este capítulo se concentra principalmente en la inversión en bienes de capital fijo, y solo se hacen algunas referencias a los inventarios al estudiar la teoría del acelerador en la sección 4.9.¹

4.1. La Demanda de Capital

Comenzaremos analizando la demanda de capital de una empresa cualquiera. Para ello definiremos el precio de arriendo del capital, denotado por R . Este es el precio que una empresa le paga a otra empresa (propietaria del capital) por arrendarlo por un período. Nosotros pensaremos que en esta economía las empresas no son las dueñas del capital sino que lo arriendan a otras a un precio R por unidad. Los dueños de todas estas empresas, arrendatarias y arrendadoras, son los hogares. Este es un supuesto para facilitar la discusión, aunque también se puede suponer que las firmas son las que invierten y son dueñas del capital, y finalmente los dueños del capital igualmente serán los hogares que son los dueños de las empresas.

De la teoría microeconómica sabemos que las empresas deciden el uso de factores con el objeto de maximizar sus utilidades:

$$\max_{K,L} PF(K, L) - (wL + RK) \quad (4.1)$$

¹Una presentación más detallada de la demanda por inventarios se presenta en Blanchard (2002).

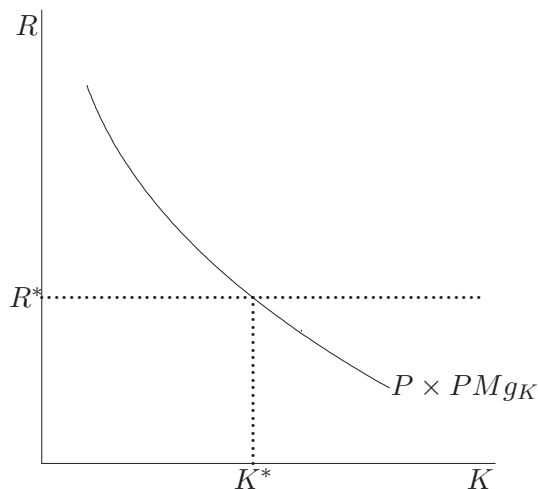


Figura 4.1: Decisión de Inversión

donde P es el precio del bien que las empresas venden, w el salario, L el empleo y K el capital. $F(\cdot, \cdot)$ es la función de producción, creciente y cóncava en cada uno de sus argumentos.

La condición de primer orden al problema de la firma es:

$$\frac{R}{P} = \frac{\partial F(K, L)}{\partial K} \equiv PMg_K$$

Lo que esto nos dice es que las empresas arrendarán capital hasta que su costo real de arriendo sea igual a la productividad marginal del capital.

Si el costo real de una unidad de capital es menor que la productividad marginal, a las empresas les conviene contratar más, porque cada unidad adicional le proporciona un beneficio mayor a lo que le cuesta ($PMg_K > R/P$). Dado que la productividad marginal es decreciente ($F_{KK} < 0$), a medida que aumenta el capital, habrá un punto en que esta haya caído lo suficiente para igualar su costo (R/P). Similarmente, cuando el costo real es superior a la productividad marginal del capital, a la empresa le conviene arrendar menos de este, lo que hará subir su productividad marginal. La empresa reducirá la contratación de capital lo suficiente como para que su costo iguale la productividad.

Análogamente podemos hacer el análisis en términos nominales: el costo monetario de arrendar el capital (R) debe igualar el valor de la productividad marginal del capital ($P \times PMg_K$). Esto se encuentra representado en la figura 4.1, donde K^* representa el stock de capital óptimo.

Como ejemplo podemos considerar una función de producción Cobb Douglas, es decir:

$$F = AK^\alpha L^{1-\alpha} \quad \text{con } 0 < \alpha < 1$$

de donde se obtiene:²

$$PMg_K \equiv F_K = \frac{\partial F}{\partial K} = \alpha A \left(\frac{L}{K} \right)^{1-\alpha} = \alpha \frac{Y}{K}$$

y por lo tanto, el capital óptimo estará dado por:

$$R = P \times PMg_K = P\alpha A \left(\frac{L}{K^*} \right)^{1-\alpha} \quad (4.2)$$

lo que equivale a:

$$K^* = L \left(\frac{A\alpha}{R/P} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

En consecuencia:

$$K^* = K^* \overset{(+)}{(A)}, \overset{(+)}{(L)}, \overset{(-)}{(R/P)}$$

es decir, el capital aumenta cuando aumenta la productividad total de los factores (A), o el empleo, y disminuye cuando sube el precio de arriendo del capital.

4.2. Tasa de Interés Nominal y Real

En esta sección se muestra que la tasa de interés nominal es la que expresa los pagos en términos monetarios, mientras la tasa real es aquella que expresa el costo del presente respecto del futuro en términos de bienes.

Supongamos que nos endeudamos con un banco a una tasa de interés nominal $i = 7\%$ por un monto de \$100.000. Entonces el interés a pagar sería de \$7.000. Pero hay que considerar la inflación, π , pues debido a ella el dinero pierde su valor, e igualmente ocurre con la deuda denominada en pesos. La inflación, que corresponde a la variación porcentual de los precios, está dada por:

$$\pi = \frac{\Delta P}{P} = \frac{P_{t+1} - P_t}{P_t} \quad (4.3)$$

Si le pedimos prestado al banco al principio del período un monto D , la deuda en términos reales es de D/P_t y al final del período es D/P_{t+1} . En términos de moneda de igual valor a la de principios del período t la deuda

²La última igualdad, que en muchas ocasiones es una representación útil de la productividad marginal de un factor proviene del hecho que $\alpha A \left(\frac{L}{K} \right)^{1-\alpha} = \alpha \frac{AK^\alpha L^{1-\alpha}}{K}$.

cae de D a $D \times P_t/P_{t+1}$.³ Este último término es igual a $D/(1 + \pi)$. Es decir, la inflación reduce el valor de las deudas expresadas nominalmente.

El pago total por dicha deuda, en términos reales es:

$$D \left(\frac{1 + i}{1 + \pi} \right)$$

la *tasa de interés real* r se define como:

$$D(1 + r) \equiv D \left(\frac{1 + i}{1 + \pi} \right) \quad (4.4)$$

Resolviendo llegamos a que:

$$1 + i = (1 + r)(1 + \pi)$$

Resolviendo el producto del lado derecho tendremos un término $r\pi$, que podemos asumir que es de segundo orden, y por lo tanto podemos ignorarlo. Esto es válido para valores bajos de r y π . Por ejemplo, si la tasa de interés real es 3% y la inflación 4%, el producto de ambas es 0,12%, lo que es despreciable.⁴ Por ello se usa la siguiente relación para la tasa de interés real y nominal:

$$i = r + \pi \quad (4.5)$$

Para las decisiones futuras no interesa la inflación pasada, y no conocemos con exactitud la inflación futura, pero si se puede hacer una estimación (π^e). Se define la tasa de interés real *ex-ante*:

$$r = i - \pi^e$$

la cual no se conoce, y es necesario hacer algún supuesto respecto de como calcular π^e . Esta es la tasa relevante para las decisiones económicas. La tasa de interés que usa la inflación efectiva durante el período se llama tasa de interés real *ex-post* y se usa como proxy de la tasa *ex-ante*. En la práctica se usa algún método estadístico para generar inflaciones esperadas y saber cual es la tasa de interés real *ex-ante*, aunque una aproximación fácil es simplemente tomar la inflación efectiva, con el debido cuidado que se está midiendo una tasa *ex-post*.

³El lector notará que si el índice de precios en t , originalmente P_t , lo normalizamos a 1, el índice en $t + 1$, será P_{t+1}/P_t . Visto de forma equivalente en términos de los precios originales la deuda real, expresada sobre la base que está medido P_t caerá de D/P_t a D/P_{t+1} .

⁴ En general $(1 + x)(1 - y)/(1 + z)$ lo escribiremos como $1 + x - y - z$.

4.3. El Precio de Arriendo del Capital (costo de uso)

Si hay un mercado competitivo por arriendo de bienes de capital, el precio al que se arrienda debería ser igual al costo de usarlo.

Analicemos el costo de usar capital en un período dado. Suponga que una empresa compra una unidad de capital a un precio, denominado en unidades monetarias, P_k . El costo de no disponer de esos recursos que podrían depositarse (o el costo financiero si el bien se compra con una deuda) es de iP_k . El bien de capital se deprecia a un $\delta\%$, entonces el costo por depreciación es δP_k . Finalmente el precio del bien de capital al final del período podría pasar de $P_{k,t}$ a $P_{k,t+1}$, pudiendo subir o bajar. Si el bien sube, la empresa tiene una ganancia por unidad de capital de $\Delta P_k \equiv P_{k,t+1} - P_{k,t}$. En consecuencia el costo (real) de uso del capital será de:

$$R = P_k \left(i + \delta - \frac{\Delta P_k}{P_k} \right) \quad (4.6)$$

donde se descuentan del costo de uso las ganancias de capital.

Supongamos por un momento que $\Delta P_k/P_k = \Delta P/P = \pi = \pi^e$, es decir el precio del capital cambia en la misma proporción que el nivel general de precios (la inflación), y es igual a la inflación esperada. Entonces, por la ecuación 4.2, el costo de uso está dado por:

$$R = P_k(r + \delta) \quad (4.7)$$

Ahora bien, si hay cambio de precios relativos tenemos que a nivel agregado $i = r + \pi$, entonces:

$$R = P_k \left(r + \delta - \left[\frac{\Delta P_k}{P_k} - \pi \right] \right) \quad (4.8)$$

El último término se refiere a un cambio de precios relativos: si la inflación sube más rápido que el aumento del precio de los bienes de capital, la empresa tiene un costo adicional a r y δ , ya que el bien de capital se hace relativamente más barato. Lo contrario ocurre cuando la inflación va por debajo del aumento del aumento de los precios de los bienes de capital, en cuyo caso el valor relativo de los activos de la empresa suben.

Nótese que la derivación del costo de uso del capital es independiente de la unidad en que se contrata el crédito. Aunque anteriormente vimos que si la empresa se endeuda nominalmente a i , alternativamente podemos pensar que la empresa se endeuda a una tasa indexada r ,⁵ o en otra moneda. En la medida que las tasas de interés estén debidamente arbitradas, dará lo mismo

⁵Suponemos de nuevo que no hay diferencias entre inflación esperada y efectiva de modo que r es una tasa real ex-ante y ex-post.

en la unidad en que se endeuda. Con incertidumbre habrá una decisión de portafolio más compleja, pero en principio el costo de uso del capital es el mismo independiente de la unidad de cuenta.

A continuación veremos el caso de contratar un crédito indexado a la inflación. Suponga que el valor de la unidad indexada (UI) al principio de t es, por normalización, 1 y la empresa compra K unidades de capital a $P_{k,t}$, que es igual en unidades monetarias y UI. La empresa se endeuda. Al final del período tendrá que pagar en UI's una cantidad igual a $(1+r)P_{k,t}K$. Supongamos que vende el bien de capital al final del período. La venta la hace a $P_{k,t+1}K(1-\delta)$, en *pesos*, lo que además considera que el capital se deprecia. La UI a final del período será igual a $UI(\text{inicial})(1+\pi)$, pero por normalización hemos tomado la UI inicial igual a 1. En consecuencia la venta final será equivalente $P_{k,t+1}K(1-\delta)/(1+\pi)$, lo que se puede escribir como:

$$\frac{1 + \Delta P_k / P_{k,t}}{1 + \pi} P_{k,t} K (1 - \delta) \approx \left(1 + \frac{\Delta P_k}{P_k} - \delta - \pi \right) P_{k,t} K$$

Esto es lo que recibe al final, que restado del costo $(1+r)P_{k,t}K$ da exactamente la ecuación (4.8) para el costo de uso del capital. Por lo tanto, independiente de la denominación del crédito, y en un mundo donde no hay incertidumbres sobre la inflación, da lo mismo si la empresa se endeuda en pesos o toma un crédito indexado.

4.4. Del Stock de Capital Deseado a la Inversión

Lo que observamos en la realidad es que las empresas no se ajustan instantáneamente a su nivel deseado de inversión sino que están continuamente invirtiendo por lo que las economías no se ubican inmediatamente en su nivel de capital óptimo. La razón detrás de este fenómeno es que las empresas enfrentan costos cada vez que desean ajustar su stock de capital, es decir, si una empresa desea modernizar su planta y con ello aumentar su productividad, tiene primero que detener el funcionamiento de la planta, después capacitar a los trabajadores, después construir, etc. Debido a la existencia de estos costos de ajuste e irreversibilidades es que las empresas ajustan su stock de capital gradualmente al stock de capital deseado, K^* .

En general una empresa tendrá dos costos asociados en su decisión de capital. Primero está el *costo de estar fuera del óptimo*. Esto es, al no tener un capital al nivel de K^* las empresas dejan de obtener mayores utilidades. Pero también tendrán un *costo de ajustar el capital*, y dependerá de la cantidad que se invierte. Mientras mayor es la inversión mayor el costo. Más aún, ambos costos son convexos. El costo de estar fuera del óptimo aumenta más que linealmente mientras más lejos se esté del óptimo para. Por su parte, el costo

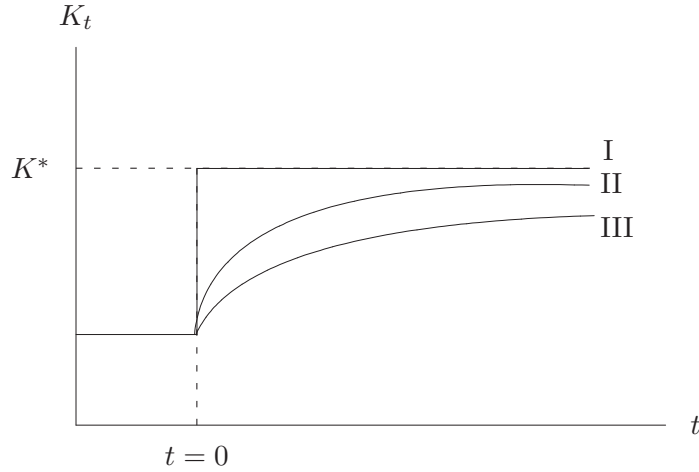


Figura 4.2: Ajuste de capital: inversión

de ajuste aumenta más que linealmente mientras más se invierte. De ser este el caso, el ajuste hacia el capital óptimo será gradual.

En la figura 4.2 se muestran tres alternativas de ajuste del capital, suponiendo que en $t = 0$ se produce un cambio en K^* . La primera (I) es cuando no hay costos de ajuste, y en la práctica no habría inversión: el capital se ajusta instantáneamente. La segunda es gradual (II) y la tercera (III) es aún más gradual. Mientras más gradual el ajuste mayor es el costo de ajuste comparado con el costo de estar fuera del óptimo. Para formalizar esto, podemos pensar en la siguiente función de costo:

$$\text{Costo} = \epsilon(K_{t+1} - K^*)^2 + (K_{t+1} - K_t)^2 \quad (4.9)$$

El primer término es el costo de estar fuera del óptimo, y el segundo el costo de ajuste. La empresa parte con K_t y conoce K^* . Entonces debe decidir K_{t+1} de modo de minimizar costos. Realizando la minimización es fácil verificar que la inversión neta en el período t es:⁶

$$I = K_{t+1} - K_t = \lambda(K^* - K_t) \quad (4.10)$$

donde $\lambda = \frac{\epsilon}{\epsilon+1}$. El parámetro λ es igual a la fracción de lo que se ajusta el capital con respecto al ajuste necesario para llegar al óptimo, y $0 \leq \lambda \leq 1$. Si $\lambda = 0,5$, entonces en cada período se ajusta la mitad de la brecha. Es fácil ver además que para ϵ cercano a cero, λ es también cercano a cero. En este caso

⁶La condición de primer orden es $\epsilon(K_{t+1} - K^*) + K_{t+1} - K_t = 0$, la que después de despejar la inversión da (4.10).

el costo de estar fuera del óptimo es muy bajo respecto del costo de ajuste de modo que el ajuste es muy gradual. Por otro lado si ϵ es muy grande, el ajuste es mucho mayor ya que el costo de ajuste pasa a ser muy bajo respecto del costo de estar fuera del óptimo.

Nótese que hemos derivado una ecuación para la inversión neta. Podríamos, alternativamente, pensar que el costo de ajuste depende del capital que existiría si no hubiera ningún tipo de inversión, es decir de $K_{t+1} - (K_t - \delta K_t)$ como segundo término en la expresión (4.9). En este caso tendríamos una ecuación del tipo de (4.10), pero para la inversión bruta en vez de la inversión neta.

Debe destacarse además que el ajuste depende de λ pero también de cuán lejos se está del óptimo. Si K_t es muy bajo, entonces deberá aumentar la inversión para alcanzar K^* . Por ejemplo, después de un terremoto aumenta I para recuperar el capital perdido. Por otro lado, si sube la tasa de interés K^* cae y por lo tanto se frena la inversión.

Por último hay que notar que K^* es el capital deseado en ausencia de costos de ajuste. Hemos simplificado el análisis al no considerar la decisión conjunta: capital deseado y velocidad de ajuste. De hecho, el problema de la firma lo resolvimos de manera secuencial. Primero determinamos el capital óptimo para luego determinar el ajuste óptimo. En un modelo más general y riguroso estas decisiones deberían ser tomadas simultáneamente, como lo veremos en la sección 4.8.

4.5. Evaluación de Proyectos y Teoría q de Tobin

Las empresas, en la práctica, no calculan directamente K^* , así como tampoco las empresas fijan su precio calculando el costo marginal. Esto es una simplificación de la conducta de las firmas, sin embargo es una aproximación razonable.⁷ Para tomar decisiones de inversión las empresas evalúan proyectos. Esto inmediatamente le da una dimensión de indivisibilidad a las decisiones de inversión que no abordaremos, aunque comentaremos más adelante. Asimismo, en esta sección ligaremos la práctica de las empresas con la teoría de la inversión.

Suponga que una empresa decide comprar un bien de capital (invertir en un proyecto) a principios del período por un precio de P_k . Este bien (proyecto) le producirá un flujo de utilidades de z_j para todo j desde $t+1$ en adelante. Por ahora asumimos que no hay incertidumbre. La decisión dependerá del costo del proyecto comparado con el valor presente de sus utilidades. El valor presente

⁷Se puede argumentar que si una empresa no se comporta de manera equivalente a estos principios no sobrevivirá en el largo plazo, ver Blanchard (2002).

de la utilidad neta a partir del período $t + 1$ es:

$$VP = \frac{z_{t+1}}{1 + r_t} + \frac{z_{t+2}}{(1 + r_t)(1 + r_{t+1})} + \dots \quad (4.11)$$

y corresponde al valor presente de los flujos z_j para $j > t$.

¿Cómo decide una empresa si invertir o no en el bien (proyecto), si su costo es P_k ?

La empresa invierte sólo si:

$$VP \geq P_k \quad (4.12)$$

es decir, si la utilidad esperada de la inversión es mayor que el costo de adquirir el capital. Es decir esta relación nos dice que conviene invertir si los beneficios actualizados VP son mayores que los costos P_k . En otras palabras si el VAN (valor actualizado neto del proyecto) es mayor o igual cero. Se debe destacar además que al arrendar o comprar el capital, la empresa puede endeudarse para hacerlo.

Si no hay costos de transacción y las tasas de interés a las que se presta o pide prestado son iguales, debería dar lo mismo arrendar o comprar ya que P_k debería ser igual al valor presente de arrendar el capital más su valor residual.

A partir de lo anterior podemos pensar entonces en la determinación de la inversión agregada en la economía. En el agregado existen muchos proyectos, pero sólo se invierte en aquellos en que se cumple (4.12). Suponga que cada proyecto es de magnitud κ , y ordene todos los proyectos de acuerdo a su VP . El proyecto 1, con valor presente VP_1 , es el más rentable, el proyecto 2, con valor presente VP_2 , el que le sigue, y así sucesivamente. Habrá entonces un proyecto marginal ι con valor presente $VP_\iota = P_k$. Ese y todos los proyectos i con $i < \iota$ se realizarán. Por lo tanto, la inversión total será:⁸

$$I = \iota \kappa$$

Una primera implicancia importante de este análisis es que al igual que la demanda por capital, ya discutida en la sección 4.1, un aumento en la tasa de interés reduce la inversión, pues reduce el VAN de todos los proyectos, en consecuencia el valor de ι que satisface $VP_\iota = P_k$ subirá. La razón es que la inversión se realiza en el presente y los beneficios llegan en el futuro, estos son descontados por la tasa de interés. Un alza en la tasa de interés reduce el valor presente de los flujos futuros.

Usando esta idea de valor de un proyecto de inversión, o más bien el valor del capital, surge la Teoría de q de Tobin⁹, que formaliza la condición que se

⁸Obviamente si el tamaño de los proyecto es distinto e igual a κ_i , la inversión agregada será $\sum_{i=1}^{\iota} \kappa_i$.

⁹James Tobin se ganó el Premio Nobel de economía el año 1981 “por su análisis de los mercados financieros y su relación con las decisiones de gasto, empleo, producción y precios”. Una de estas contribuciones es la que aquí se discute.

debe cumplir para que una firma invierta. La teoría postula que una firma invierte cada vez que:

$$q = \frac{VP}{P_k} \geq 1 \quad (4.13)$$

donde q es conocida como la “ q de Tobin”. Si ésta fuera una empresa con acciones en la bolsa, entonces q sería el valor de cada unidad de capital: VP es el valor económico del capital y P_k es su “valor de reposición”, o sea lo que cuesta comprar el capital. Mientras q sea alto conviene comprar el capital. Hay que realizar todos los proyectos hasta que $q = 1$, esto es hasta que el VAN sea cero. Una consideración adicional importante es la existencia de costos de ajuste, tal como se discutió anteriormente, que explica por qué no se llega a un q de uno instantáneamente, y veremos con más detalle en la sección 4.8 .

Una implicación interesante de entender el valor de las acciones como el valor económico (estimado por el mercado) de las empresas es que el precio de las acciones puede ayudar a predecir el ciclo económico. Los z estarán relacionados a las utilidades y por lo tanto al estado de la economía. Si el mercado prevé que viene una recesión, donde las ventas y utilidades se resentirán, el precio de las acciones comenzará a bajar, o al menos su crecimiento se desacelerará.

Es importante relacionar el análisis de evaluación de proyectos con la teoría microeconómica del stock de capital óptimo discutida anteriormente . Eso es lo que se hace a continuación. Considere que el bien de capital se usa para producir una cantidad Z de un bien que se vende a un precio P . El bien de capital se deprecia δ por período, de modo que en cada período Z cae una fracción δ . Además suponemos que el precio del bien aumenta con la inflación π . Supondremos además que el bien se empieza a producir y vender al final del primer período cuando ya ha habido inflación (esto se hace sólo para simplificar las fórmulas) y la tasa de interés *nominal* es constante e igual a i . Nótese que usamos tasa de interés nominal porque los flujos son nominales, en la fórmula (4.11) usamos la tasa real ya que z se medía en términos reales. El VAN del proyecto es:¹⁰

$$\begin{aligned} \text{VAN} &= -P_k + \frac{PZ(1+\pi)}{1+i} + \frac{PZ(1+\pi)^2(1-\delta)}{(1+i)^2} + \dots \\ &= -P_k + \frac{PZ}{1+r} + \frac{PZ(1-\delta)}{(1+r)^2} + \dots \\ &= -P_k + \frac{PZ}{r+\delta} \end{aligned}$$

con lo que llegamos a que el proyecto se hace si:

$$P_k \leq \frac{PZ}{r+\delta}$$

¹⁰Para derivar esta expresión se usa el hecho que $(1+\pi)/(1+i) = 1/(1+r)$ y tal como se muestra en la nota 4 $(1-\delta)/(1+r) \approx 1/(r+\delta)$, donde esta última aproximación se usa como igualdad.

La empresa realizará la inversión hasta que llegue a la igualdad. Más aún, podemos suponer que Z depende del capital. La variable Z es la producción de esta unidad adicional (marginal) de capital, de modo que Z es la productividad marginal del capital, y es decreciente con K , es decir las unidades adicionales generan cada vez menos producción adicional. Por lo tanto, llegamos a nuestra ya conocida relación que determina el capital deseado:

$$PMg_K = \frac{P_k}{P}(r + \delta). \quad (4.14)$$

Esta es la ecuación del capital óptimo derivada anteriormente (ver ecuación (4.2)). Por lo tanto, el mismo análisis de evaluación de proyectos lo podemos hacer análogo al enfoque tradicional de evaluación de proyectos.

4.6. Incertidumbre e Inversión*

El análisis de los efectos de la incertidumbre sobre la inversión ha sido particularmente complejo, debido a las complicaciones matemáticas. Pero también ha sido complejo debido a que sus primeras implicaciones eran difíciles de entender. Si uno lee la prensa o pregunta a gente del mundo de los negocios, por lo general dirán que la incertidumbre es mala, que la incertidumbre reduce la inversión. La teoría, en principio, dice lo contrario. Hartman (1972) y después con más generalidad Abel (1983), han mostrado que la teoría predice que a mayor incertidumbre mayor es la inversión. Más precisamente, si aumenta la varianza de las utilidades de una empresa, aumenta la inversión. Nótese que la mayor incertidumbre significa que tanto los malos eventos como los buenos eventos aumentan su probabilidad de ocurrencia. Es decir, cuando analizamos incertidumbre mantenemos el valor esperado de las variables constante y variamos la volatilidad. De otro modo no podríamos aislar el efecto de cambio en el valor esperado, del de cambios en la varianza.

La razón técnica, que analizaremos aquí, es que la función de utilidad es convexa, y si una función de utilidad es convexa, más incertidumbre es preferible a menos. Esto lo estudiaremos en un esquema muy simplificado, así como las respuestas que ha dado la teoría para mostrar que mayor incertidumbre produce menos inversión, lo que en general también muestran los datos.¹¹

Si hay incertidumbre, hay que modificar la regla para realizar un proyecto. Un proyecto dado en el período t se hará siempre y cuando el valor esperado dada toda la información en t (E_t) es mayor al costo del bien de capital, es decir:

$$P_k \leq E_t V P.$$

¹¹Para más detalles sobre la teoría de la inversión e incertidumbre ver Caballero (1991, 1999).

Usando el caso particular de flujo constante que nos llevó a la ecuación (4.14), tenemos que un proyecto se realizará si:

$$P_k \leq E_t \left[\frac{P \times PMg_K}{r + \delta} \right]. \quad (4.15)$$

Entonces, la pregunta relevante es que pasa con el lado derecho de la expresión anterior cuando la incertidumbre aumenta. Si el lado derecho aumenta con la incertidumbre quiere decir que habrá menos inversión pues a los proyectos se les exigirá mayor rentabilidad para que se ejecuten. Para responder a esta cuestión consideremos que K es fijo y quedará fijo, y que el trabajo se ajustará en cada período para maximizar utilidades. La función de producción en cualquier período, donde K es siempre completamente fijo, es:

$$Y = AK^\alpha L^{1-\alpha}. \quad (4.16)$$

En esta función de producción sabemos que $PMg_L = (1-\alpha)Y/L$ y $PMg_K = \alpha Y/K$. Por otra parte, al ajustar el empleo para maximizar utilidades tendremos que la empresa iguala la productividad marginal del trabajo con el salario real, W/P . En consecuencia, tenemos que:

$$L = (1 - \alpha)Y \frac{P}{W}.$$

Reemplazando esta expresión en la función de producción tendremos que:

$$\begin{aligned} Y &= AK^\alpha \left((1 - \alpha)Y \frac{P}{W} \right)^{1-\alpha} \\ &= A^{1/\alpha} K (1 - \alpha)^{(1-\alpha)/\alpha} \left(\frac{P}{W} \right)^{(1-\alpha)/\alpha}. \end{aligned}$$

Usando ahora el hecho que $PMg_K = \alpha Y/K$, multiplicando por P , y arreglando términos, tenemos que la inversión se realizará si:

$$P_k \leq \alpha (1 - \alpha)^{(1-\alpha)/\alpha} E_t \left[\frac{A^{1/\alpha} P^{1/\alpha}}{W^{(1-\alpha)/\alpha} (r + \delta)} \right]. \quad (4.17)$$

Entonces, la pregunta que debemos responder es que pasa con el valor esperado de la expresión entre paréntesis cuadrado del lado izquierdo de (4.17) cuando la incertidumbre aumenta.

Consideremos el caso en que el precio del producto y la productividad son inciertos (estocásticos). Si la función fuera lineal en P y A y ambas variables fueran independientes (su covarianza es cero), entonces un aumento de la incertidumbre no tendría efectos, pues la expresión del lado derecho dependería

sólo de los valores esperados y no de su variabilidad.¹² Ahora bien, cuando la función no es lineal, la varianza de las variables aleatorias afectan el valor esperado. La desigualdad de Jensen dice que si la función es convexa, la incertidumbre aumenta el valor esperado, mientras que si la función es cóncava, el valor esperado se reduce con la incertidumbre.¹³

Para entender la desigualdad de Jensen, que es muy usada en macroeconomía y finanzas, basta con observar la figura 4.3. El panel de la izquierda es una función convexa, el de la derecha cóncava. Considere la función convexa, y suponga que la utilidad es F , que depende de una variable x que fluctúa. Suponga un caso en que la varianza es cero, es decir hay certeza del valor de x y este es Ex . Entonces el valor de la utilidad es F_c (certeza). Ahora suponga que x fluctúa entre los valores representados por la línea recta, y el valor esperado es el mismo. Claramente en esta figura se ve que la utilidad esperada de las fluctuaciones ($EF(x) = F_i$) es mayor que la utilidad del valor de x esperado ($F(Ex) = F_c$). Podríamos aumentar la incertidumbre, es decir desplazar la recta hacia arriba, y el valor esperado de la mayor volatilidad resultaría en mayor utilidad esperada. Lo contrario ocurre en el caso de una función cóncava, ya que $F_c > F_i$. En este caso la estabilidad es preferible a la volatilidad.¹⁴ Eso es precisamente lo que vimos en teoría del consumo, donde una función de utilidad cóncava induce suavización del consumo a través del tiempo.

Ahora podemos entender por qué la incertidumbre sube la inversión. La expresión entre paréntesis es convexa en A y P , debido a que su exponente es mayor que 1, ya que α es menor que 1.¹⁵ Por lo tanto, un aumento de la incertidumbre (volatilidad) de A y P aumentarán el valor esperado del lado derecho, con lo cual habrá más proyectos rentables, puesto que todos los proyectos serán ahora más rentables en valor esperado.

Sin duda que resulta paradójico este resultado, al menos a la luz de la discusión cotidiana. La evidencia empírica también reafirmaría el hecho que mayor incertidumbre deprime la inversión. En consecuencia debemos preguntarnos como adaptar la teoría para hacerla más realista.

La literatura ha discutido varias razones por las cuales la relación inversión-incertidumbre pueda ser negativa. A este respecto cabe mencionar cuatro:

- *Empresarios adversos al riesgo*. Si los inversionistas son adversos al ries-

¹²Si tenemos dos variables independientes X e Y , entonces $EXY = EXEY$, y el resultado es independiente de las varianzas.

¹³Formalmente esto es: $Ef(X) > [<]f(EX)$ si f es convexa [cóncava], es decir si $f'' > [<]0$.

¹⁴La base de la teoría del consumo es una función de utilidad cóncava (recuerde $u'' < 0$), la que resulta en que los individuos prefieren suavizar el consumo,teniéndolo lo más parejo posible en el tiempo. Si la utilidad fuera convexa, el individuo consumiría todo en un período.

¹⁵La derivada de X^n es nX^{n-1} y la segunda derivada es $n(n-1)X^{n-2}$, y será positiva siempre y cuando n sea mayor que 1.

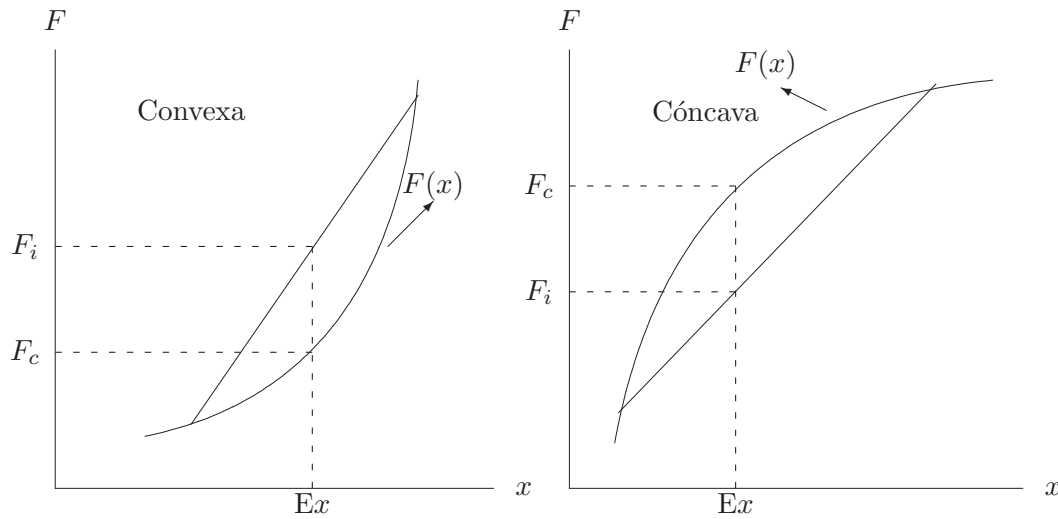


Figura 4.3: Volatilidad en Funciones Convexas y Cóncavas

go, es decir la utilidad del empresario es cóncava, quiere decir que ellos harán la inversión siempre y cuando $U(VP)$ sea mayor que el costo de invertir, donde U es una función cóncava. Obviamente, la convexidad de VP respecto de los precios y la productividad puede revertirse con la concavidad de la función de utilidad. Esto puede ser relevante cuando se trata de empresas de tamaño medio y pequeño en países en desarrollo, donde los beneficios de la empresa están muy asociados a la utilidad del empresario ya que esta constituye la mayor parte de sus ingresos laborales. En caso de inversiones que se transan en mercados de capitales más profundos es más difícil apoyar este argumento debido a que es posible encontrar inversionistas neutrales al riesgo que arbitren las primas por riesgo de los inversionistas adversos al riesgo.

- *Irreversibilidad de la inversión.* La teoría supone por lo general que la inversión se puede deshacer, es decir, hay un mercado en el cual la empresa puede vender el capital que tiene. Puede haber costos de ajustar el capital, pero este es simétrico para aumentarlo o reducirlo. Sin embargo, en la realidad este costo es muy asimétrico, en particular en muchos casos aumentar el capital es fácil, pero deshacerse de él es a veces imposible. Este es el caso de la inversión irreversible. Si la inversión es irreversible, el momento en que se invierte pasa a ser muy importante. El análisis de la inversión irreversible se ha hecho usando la teoría de finanzas de *opciones*. Una opción permite a su tenedor, por ejemplo, comprar un activo

a un precio dado en un lapso de tiempo. Se podría no ejercer nunca la opción si el precio durante este lapso es mayor al que especifica la opción. Con la inversión irreversible se genera un valor de opción. Es decir, postergar una inversión permite mantener la opción a invertir. Una vez que se invierte el valor de la opción desaparece. Mientras mayor es la incertidumbre, mayor será el valor de la opción, y más puede convenir esperar para invertir. En este caso, en el agregado se pueden materializar menos proyectos de inversión cuando la incertidumbre sube. En todo caso, es necesario destacar que no siempre la mayor incertidumbre generará menos inversión, pero ciertamente la presencia de irreversibilidades ayuda a generar una relación negativa entre inversión e incertidumbre. Visto de otra forma, como las empresas no pueden vender su capital excesivo en caso que sobreinviertan, uno puede esperar que las empresas invertirán menos para evitar esta situación. Este tema lo discutimos en más detalle con un ejemplo en la siguiente sección.

- *Tecnología y competencia.* Si la tecnología no exhibe retornos constantes a escala, o no hay competencia perfecta, es posible que la incertidumbre reduzca la inversión. En ambos casos la “convexidad” de la función de utilidades de las empresas cae. Las empresas en un ambiente de competencia se benefician de alzas de precios, directamente por el aumento del precio por unidad vendida, e indirectamente por el aumento de la cantidad ofrecida.¹⁶ Sin embargo, este último efecto se reduce cuando la competencia es imperfecta porque los aumentos de la producción llevan a caídas del precio, puesto que las empresas enfrentan una demanda con pendiente negativa.¹⁷ Lo anterior amortigua los incentivos a invertir cuando suben los precios. Por su parte, si los retornos a escala son decrecientes los aumentos del uso de factores aumenta la producción menos que proporcionalmente, por lo tanto también en este caso es posible que la relación entre inversión e incertidumbre sea negativa.
- *Restricciones de Liquidez.* Para que las empresas puedan aprovechar los potenciales beneficios de la volatilidad deben ser capaces de acceder al mercado financiero, pero ello no siempre ocurre. Cuando una empresa sufre restricciones al endeudamiento no puede realizar todos sus planes, en especial aquellos asociados a proyectos de larga maduración. Es decir, si los proyectos se demoran en entregar sus beneficios, en particular en

¹⁶Recuerde de microeconomía que las empresas igualan precio con costo marginal, y cuando sube el precio suben la oferta hasta que el costo marginal, que es creciente en la cantidad, iguale al precio.

¹⁷Para más detalles ver Caballero (1991), quien muestra que incluso con irreversibilidades, la competencia perfecta y los retornos constantes a escala podrían generar una relación positiva entre incertidumbre e inversión.

ambientes de mayor incertidumbre, las restricciones al endeudamiento pueden ser un factor importante que limite la inversión.

4.7. Irreversibilidad de la Inversión e Incertidumbre

Hemos mencionado a la irreversibilidad como un factor que puede explicar por qué la incertidumbre puede inhibir el desarrollo de proyectos de inversión.¹⁸ Esto además nos permite tener modelos más realistas para describir la relación entre incertidumbre e inversión. En esta sección ilustraremos cómo la incertidumbre en presencia de irreversibilidad puede retrasar el inicio de los proyectos, lo que resulta en menor inversión.

Suponga un proyecto que requiere de una inversión P_k y sus retornos se obtienen al período siguiente. La inversión es irreversible en el sentido que en el período subsiguiente el bien de capital ya no vale nada, pues el proyecto terminó y el capital invertido sólo sirve en ese proyecto. En consecuencia su valor de reventa es cero. El proyecto tiene un retorno z incierto, el que puede tomar dos valores. Con probabilidad p su retorno es \bar{z} y con probabilidad $1 - p$ es \underline{z} , de modo que $\bar{z} > \underline{z}$. Esto está descrito en el panel I de la figura 4.4. En $t = 0$ se realiza el proyecto, que rinde con incertidumbre el siguiente período, y luego termina sin valor residual.

Asumiremos que el proyecto tiene un valor presente positivo con \bar{z} , pero negativo con \underline{z} . Esto es:

$$V(\bar{z}) = -P_k + \frac{\bar{z}}{1+r} > 0, \quad (4.18)$$

$$V(\underline{z}) = -P_k + \frac{\underline{z}}{1+r} < 0. \quad (4.19)$$

El valor esperado del proyecto cuando se inicia en $t = 0$, V_0 , será:

$$V_0 = pV(\bar{z}) + (1 - p)V(\underline{z}), \quad (4.20)$$

que asumiremos es positivo. Es decir estamos analizando un proyecto que es rentable, pero hay un escenario en el cual el beneficio neto es negativo y no convendría hacerlo. Si el inversionista está obligado a hacer la inversión en $t = 0$, la realizará, puesto que V_0 es positivo.

Sin embargo, en un caso más realista, podemos pensar que el inversionista puede esperar para desarrollar el proyecto a la espera que se le revele alguna información relevante que reduzca la incertidumbre. Por ejemplo, considere a un inversionista desea trabajar con una tecnología moderna, pero aún no

¹⁸El libro de de Dixit y Pindyck (1993) analiza en detalle la irreversibilidad de la inversión, su relación con la incertidumbre y las opciones. En el capítulo 2 presentan un interesante y sencillo ejemplo numérico. Aquí sólo se presenta el argumento más general en forma resumida.

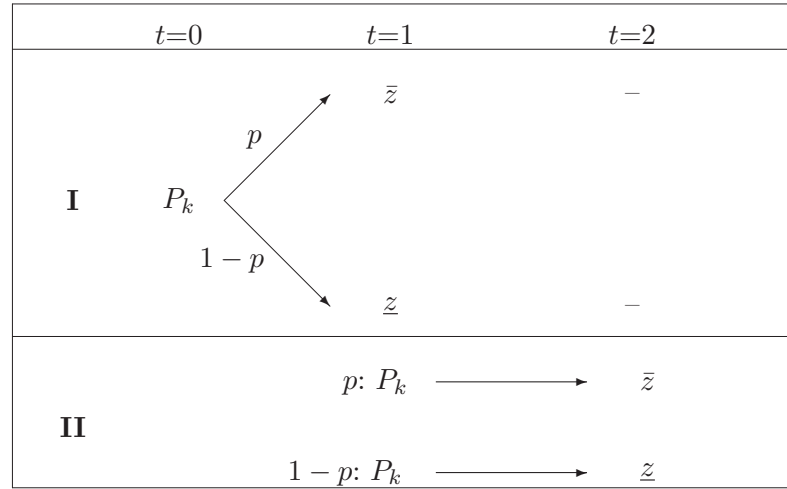


Figura 4.4: Alternativas de Inversión

consolidada. Tal vez al esperar un tiempo podrá ver si esta tecnología efectivamente tiene éxito. Por lo tanto podemos pensar, razonablemente, que el inversionista puede también seguir la estrategia del panel II. Es decir, puede esperar a invertir en $t = 1$, momento en el cual sabrá con certeza si se da \bar{z} o \underline{z} . Si se da \bar{z} invertirá, pues los retornos son positivos desde el punto de vista de $t = 0$. Sin embargo, si se revela \underline{z} no le conviene invertir, pues el valor presente es negativo. Por lo tanto, el valor esperado en $t = 0$ de postponer la inversión (V_1) a la espera que se resuelva la incertidumbre es:

$$\begin{aligned}
 V_1 &= p \frac{V(\bar{z})}{1+r} + (1-p) \times 0 \\
 &= p \frac{V(\bar{z})}{1+r}.
 \end{aligned}$$

Con probabilidad p recibe $V(\bar{z})$, aunque descontado con la tasa de interés r . Sin embargo, por el lado positivo, con probabilidad $1-p$ recibe cero, en vez de terminar invirtiendo en un proyecto con pérdidas. De las ecuaciones (4.20) y (4.21) se ve claramente este tradeoff. Postergar el proyecto tiene un costo de atraso, dado por el descuento $1+r$ en (4.21), pero tiene el beneficio que se ahorra incurrir en la pérdida $V(\underline{z})$ en los escenarios negativos. De hecho si r es relativamente bajo, $1-p$ alto o $V(\underline{z})$ muy negativo, lo más probable es que $V_1 > V_0$ con lo cual es preferible esperar. Más incertidumbre, en el sentido que \bar{z} sube y \underline{z} baja, aumenta el beneficio de esperar ya que el estado malo, es ahora más malo, y se puede evitar esperando tener más información.

Es posible también determinar cuánto está dispuesto a pagar el inversionista por la resolución de la incertidumbre. En $t = 0$ el inversionista pagaría hasta $V_1 - V_0$ por saber valor tomará z . Obviamente si $V_1 < V_0$, no conviene esperar ni tampoco pagar por resolver la incertidumbre. En este caso la combinación de ambos escenarios es suficientemente buena como para no preferir esperar.

Este resultado es conocido en finanzas, puesto que invertir representa una *opción*. Un comprador de un bien puede preferir pagar para asegurarse un valor máximo para el precio de compra de un bien. En este caso compra la *opción* de adquirir el bien en el futuro a un precio máximo \bar{x} . Si al momento de *ejercer* la opción el precio del bien es menor que \bar{x} , entonces lo comprará al precio de mercado. En cambio si el precio está por encima de \bar{x} , entonces ejercerá la opción comprando el bien a \bar{x} . Con la inversión ocurre lo mismo. En nuestro ejemplo, el inversionista “compra” la opción de invertir en el futuro sólo si $z = \bar{z}$, y en caso que $z = \underline{z}$ no ejercerá la opción de invertir. Esta opción tiene un valor y en casos más generales podríamos calcularlos usando conceptos de finanzas.

Lo importante desde el punto de vista de la discusión de inversión e incertidumbre es que para un mismo valor esperado, la incertidumbre puede generar el incentivo a esperar a tener más información, retrasando los proyectos de inversión. Si no hubiera incertidumbre, y el proyecto tuviera un retorno cierto de $p\bar{z} + (1 - p)\underline{z}$, el inversionista lo hará en $t = 0$. La incertidumbre es la que genera el incentivo a esperar, de modo de despejar las incertezas y así tener un mejor retorno esperado.

4.8. Costos de Ajuste y la Teoría q *

En esta sección estudiaremos más formalmente la teoría q y su relación con los costos de ajuste de la inversión. Esto nos servirá para a profundizar nuestra intuición sobre el proceso de inversión y la teoría q . Para esto supondremos que la empresa produce Y_t con una función de producción $f(K_t)$. El precio del bien es P_t . Por otra parte la empresa acumula capital (no arrienda) comprándolo a un precio $P_{K,t}$. Para invertir I_t la empresa no sólo debe comprar el capital sino que además debe incurrir en un costo $C(I_t)$, donde C es creciente y convexa, y satisface $C(0) = C'(0) = 0$, es decir si no invierte tanto el costo de ajuste como su costo marginal son cero. La utilidad monetaria en cada período t será:

$$P_t f(K_t) - P_{K,t}(I_t + C(I_t)).$$

La evolución del capital está dada por:

$$K_{t+1} = I_t + (1 - \delta)K_t.$$

La empresa maximizará el valor presente de sus utilidades monetarias, descontadas a la tasa de interés nominal i , que por simplicidad asumimos constante.¹⁹

$$\max_{\{K_t\}} \sum_{\tau=0}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^\tau} \{P_\tau f(K_\tau) - P_{k,\tau} [K_{\tau+1} - (1-\delta)K_\tau + C(K_{\tau+1} - (1-\delta)K_\tau)]\}.$$

Para simplificar supondremos que no hay depreciación, $\delta = 0$. Escribiendo sólo los términos donde aparece K_t tenemos que:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{(1+i)^{t-1}} P_{k,t-1} (K_t - K_{t-1} + C(K_t - K_{t-1})) + \\ & + \frac{1}{(1+i)^t} [P_t f(K_t) - P_{k,t} (K_{t+1} - K_t + C(K_{t+1} - K_t))]. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Para simplificar el álgebra supondremos que el precio relativo del capital respecto del precio de los bienes no cambia en el tiempo, es decir podemos asumir que $P_{k,t} = P_t$. Además si dividimos toda la expresión anterior por P_{t-1} y simplificamos por $1/(1+i)^{t-1}$, llegamos a que para maximizar utilidades con respecto al capital en t se debe derivar e igualar a cero la siguiente expresión:

$$-K_t + K_{t-1} - C(K_t - K_{t-1}) + \frac{1}{1+r} [f(K_t) - (K_{t+1} - K_t + C(K_{t+1} - K_t))].$$

Donde hemos usado la tasa de interés real debido a que $1+i = (1+r)P_t/P_{t-1}$. La condición de primer orden que deben cumplir todos los K debe ser:

$$1 + C'(I_{t-1}) = \frac{1}{1+r} [f'(K_t) + (1 + C'(I_t))]. \quad (4.22)$$

Ahora definiremos q_t de la siguiente forma:

$$q_t = 1 + C'(I_{t-1}),$$

es decir corresponde al valor de instalar una unidad de capital K_t . Si no hubiera costos de ajuste, el valor de q sería 1, pues hemos asumido que el precio de los bienes es igual al precio del bien de capital. Sin embargo, la presencia de

¹⁹Este problema de optimización se puede resolver usando las ecuaciones de programación dinámica, pero en este caso usaremos un método más lento pero sencillo. Reemplazaremos las ecuaciones anteriores en la función a maximizar para obtener una expresión que contenga todos los K_τ y no haya restricciones de modo que el óptimo se encuentra derivando e igualando a cero. Las condiciones de segundo orden para un máximo, que no verificaremos aquí, se cumplen debido a que $f'' < 0$ y $C'' > 0$.

costos de ajuste aumenta el valor del capital, pues una unidad adicional de capital aumenta marginalmente su costo de instalación.

Ahora podemos reescribir la condición de primer orden de la siguiente forma:

$$r = \frac{f'(K_t)}{q_t} + \frac{\Delta q}{q_t},$$

donde $\Delta q = q_{t+1} - q_t$. Esta relación nos dice que para mantener una unidad de capital se debe igualar su costo de oportunidad (r ya que no hay depreciación) con el beneficio de tener el capital. El beneficio tener la unidad de capital esta compuesto de su aporte marginal sobre los ingresos más la ganancia de capital, que corresponde al aumento de su valor. Esta es una condición de arbitraje que veremos repetida en muchos contextos a lo largo de este libro.

Es importante notar que si la empresa está aumentando su capital, se tiene que $q > 1$. El proceso de inversión se detendrá cuando $q = 1$. En ese caso la inversión es cero y el nivel de capital satisface $f'(K) = r$ que es lo que estudiamos anteriormente en un contexto estático sin costos de ajuste.

La condición de optimalidad para el capital la podemos analizar con mayor profundidad si la escribimos de la siguiente forma:

$$q_t = \frac{f'(K_t)}{1+r} + \frac{q_{t+1}}{1+r}.$$

Como ya hemos procedido al estudiar el consumo podemos ir reemplazando hacia adelante, partiendo por q_{t+1} y así sucesivamente, para llegar a:

$$q_t = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{f'(K_{t+s})}{(1+r)^{s+1}}. \quad (4.23)$$

Donde hemos asumido que se cumple la siguiente condición de transversalidad:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{q_{T+1}}{(1+r)^T} = 0.$$

Es decir, si el capital tiene algún valor, traído al presente, se usa completamente.

La ecuación (4.23) nos dice que el valor de una unidad de capital es igual al valor presente de su contribución marginal a los ingresos de la empresa, que debido a que no hemos usado trabajo y la empresa es dueña del capital, es igual a la utilidad marginal. Considerando el caso en que K es constante y resolviendo la sumatoria llegaremos a que $q = 1$ cuando $f'(K) = r$, que es el caso en el cual no se invierte más.

En la sección 4.4 estudiamos la inversión como un ajuste gradual al capital óptimo y para finalizar esta sección es útil explicar las diferencias. Esta sección ha presentado un análisis más riguroso. Si bien el análisis anterior permite entender en términos simples el proceso de inversión, en esta sección el análisis

es más general por cuanto considera simultáneamente el efecto de los costos de ajuste y la decisión de capital óptimo. En el caso anterior derivamos separadamente el proceso de ajuste de la decisión de capital óptimo. Los resultados son similares, pero en este hemos sido capaces de entender con mayor profundidad el efecto de los costos de ajuste.

4.9. Restricciones de Liquidez y la Teoría del Acelerador

También, al igual que en el caso del consumidor, podemos pensar en el efecto de restricciones de liquidez sobre la inversión. Si la empresa no tiene acceso pleno al mercado de capitales, la inversión no sólo depende del VAN del proyecto sino que también de sus posibilidades de financiamiento, la que en el caso de acceso restringido al mercado de capitales dependerá también de los flujos de caja actuales.

¿Qué implicancia tiene ésto desde el punto de vista de la inversión? Que el nivel de actividad económica también será un determinante importante de la inversión. Si las empresas necesitan tener un flujo de caja para invertir, este dependerá del ciclo económico y por lo tanto del nivel de actividad agregada. Si la economía está en auge, habrán mayores flujos de caja y mas proyectos rentables se realizarán, incluso proyectos para los que convendría tal vez esperar se pueden adelantar aprovechando los excedentes de caja de las empresas. Lo opuesto pasaría en recesiones.

Lo importante de considerar restricciones de liquidez es que la inversión será más sensible al nivel de actividad económica, de manera análoga a como ocurre con el consumo.

El timing de los flujos de un proyecto será relevante, no sólo su valor presente. Si las firmas enfrentan restricciones de liquidez elegirán proyectos no sólo con VAN positivo, sino que aquellos que tengan flujos de caja más cercanos en el tiempo. Las restricciones de liquidez implican que la inversión depende del nivel de actividad económica. Más precisamente la inversión de empresas con falta de acceso al mercado de capitales depende de los flujos de caja de las empresas. Los flujos de caja son los que en definitiva determinan la capacidad de financiamiento propio, sin necesidad de recurrir al mercado de capitales.

Otra teoría tradicional de inversión, y que en cierta medida podemos asociar a las restricciones de liquidez, es la llamada *teoría del acelerador*. Esta teoría plantea que cuando la actividad económica crece elevadamente las empresas invierten más y esto genera un proceso acelerador que hace que este aumento persista en el tiempo. En este caso la inversión depende no sólo del nivel de actividad, sino que también de su tasa de crecimiento. Si la economía crece, ayuda liberar con mayor flexibilidad las restricciones de liquidez y hacer que

las empresas inviertan más. La teoría del acelerador tiene una representación muy sencilla, pues supone que la inversión depende del crecimiento pasado del capital:

$$I_t = \sum_{\tau=t}^{t-n} \alpha_{\tau} \Delta K_{\tau}.$$

Ahora bien, si la producción Y es lineal en K , es decir $Y = aK$, tendremos que la inversión es:

$$I_t = \frac{1}{a} \sum_{\tau=t}^{t-n} \alpha_{\tau} \Delta Y_{\tau}.$$

Cuando el crecimiento pasado del producto es elevado, la inversión se acelerará. Esta teoría es una de las primeras teorías de la inversión y una debilidad importante es que no tiene precios (costo de uso o q) como determinantes de la inversión.

Pensar en restricciones de financiamiento provee una justificación teórica a agregar el producto como determinante de la inversión. Otra razón por la cual al tasa de crecimiento del PIB afecta positivamente la inversión es porque un mayor crecimiento puede ser una señal de mejores expectativas futuras. Esto a su vez puede incentivar a las empresas a invertir más. Esto es particularmente el caso de la inversión en inventarios. Si las empresas perciben que sus ventas aumentarán pueden decidir aumentar sus existencias para poder afrontar de mejor forma el crecimiento.

La teoría del acelerador fue desarrollada para todos tipos de inversión, pero en la actualidad puede hacer más sentido para el ajuste de inventarios, bajo el supuesto que las empresas desean tener una fracción constante de inventarios sobre producción. En consecuencia cuando la economía está creciendo las empresas estarán acumulando inventarios, y lo contrario ocurre cuando la economía se desacelera.

4.10. Impuestos e Inversión

Para discutir los efectos de la política tributaria sobre la inversión empezaremos analizando el efecto de los impuestos sobre el costo de uso del capital. Tal como se presentó antes, es útil pensar que hay empresas que son dueñas del capital y sus utilidades están asociadas a lo que ganan al arrendar el capital (R). Dicha renta está sujeta a un impuesto τ . Dada una tasa de interés real r , una depreciación δ y un impuesto a las utilidades ²⁰ τ , entonces se debe cumplir que:

$$(1 - \tau)R = P_k(r + \delta)$$

²⁰En Chile el impuesto a las utilidades de primera categoría es del 15 %

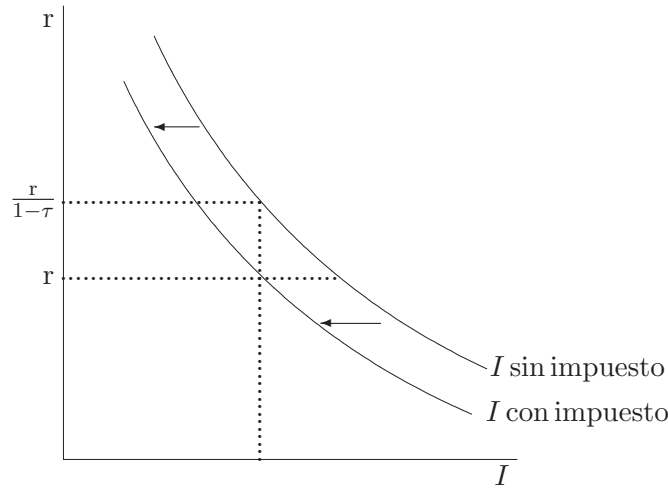


Figura 4.5: Inversión e Impuestos

Esta relación dice que las firmas que arriendan el capital tendrán que elevarlo para cubrir el costo de uso y los impuestos. De hecho $R = \text{costo de uso}/(1 - \tau)$.

Tal como lo muestra la figura 4.5 al agregar un impuesto para cada nivel de inversión se exige una mayor tasa de interés para poder pagar el impuesto.

Si además agregamos la existencia de un subsidio s por usar una unidad de capital, tendríamos que:

$$(1 - \tau) R = P_k (r + \delta) (1 - s)$$

s se entiende como una tasa efectiva de subsidio por peso gastado en capital.

Esta es sin duda una presentación sencilla e ignora algunos aspectos importantes en materia de impuestos e inversión. En particular hemos supuesto que a las empresas que arrienda el capital se les aplica una tasa τ , pero no hemos discutido que pasa con las empresas que realizan la inversión.

A continuación nos concentraremos en los efectos de los impuestos sobre el stock de capital deseado. Esta es una forma natural de estudiar el efecto de los impuestos en el contexto de las teorías revisadas en este capítulo. Lo que es importante reconocer es que un aumento de impuestos no sólo reduce los ingresos de las empresas, sino que también sus costos. Simplemente piense en las empresas cuando calculan los VAN de sus proyectos. Si todos los flujos (costos y utilidades) tienen un impuesto parejo de τ , esto no afectará si el VAN es o no cero, ya que $\text{VAN}/(1 - \tau) > 0$ se cumple independiente del valor de τ . Tampoco afectará el ranking, y por lo tanto podría no afectar la inversión.

Las diferencias pueden provenir del hecho que las utilidades económicas de las empresas no son las mismas que las utilidades desde el punto de vista contable, y por lo tanto puede introducir distorsiones.²¹

Supongamos una empresa que vende un bien a un precio unitario, el que produce con una función de producción $f(K)$, que por simplicidad sólo depende del capital, K , y es creciente y con rendimientos decrecientes. El capital se deprecia completamente en un período y la tasa de interés es r . En consecuencia el costo del capital, asumiendo que su precios también es 1, es $1 + r$. Las utilidades “económicas” de la empresa (Π_E) son:

$$\Pi_E = f(K) - (1 + r)K.$$

Si el sistema tributario midiera las utilidades económicas y les cobrara un impuesto τ a las utilidades, entonces las empresas maximizarían $(1 - \tau)\Pi_E$, que es exactamente lo mismo que maximizar Π_E . Por lo tanto, el impuesto a las utilidades no tendría efectos sobre el nivel de capital deseado. En este caso el capital óptimo está dado por:

$$f'(K) = 1 + r \quad (4.24)$$

El problema es que en la realidad las utilidades para efectos contables (Π_C) no son iguales a las económicas. En la práctica, para efectos tributarios, a los ingresos se les descuenta el pago de intereses sobre la deuda incurrida para invertir, pero no se descuenta el costo de oportunidad cuando las empresas usan fondos propios para financiar la inversión. Asumiremos que la deuda de la empresa es una fracción b del capital total. Es decir el costo imputable será de rbK y no rK .

Por otra parte está la depreciación. En general a las firmas se les permite depreciar una fracción d del capital invertido. En nuestro caso, la depreciación económica es 1, pero supondremos que para efectos tributarios la depreciación es d . Como estamos considerando inversión por un sólo período, consideraremos que d puede ser mayor que 1. Esto es para contemplar la posibilidad que haya depreciación acelerada²² o que haya subsidios a la inversión (“investment tax credits”²³). Por lo tanto, el descuento por la depreciación y/o compra del capital será dK . De esta forma las utilidades contables serán:

$$\Pi_C = f(K) - (rb + d)K.$$

²¹La referencia clásica a este respecto es Hall, R. y D. Jorgenson (1967). La discusión que aquí continúa sigue el trabajo de Bustos, Engel y Galetovic (2003).

²²En un caso de más de un período esto consiste en imputar en los períodos iniciales más de lo que correspondería de acuerdo a la depreciación efectiva del capital.

²³En la práctica este mecanismo permite a las empresas que cuando adquieren el capital puedan descontar parte del gasto de impuestos, lo que ocurre antes que se deprecie. este es otro mecanismo de subsidio al capital, como es el caso de la depreciación acelerada.

Sobre estas utilidades las empresas pagan τ en impuestos, lo que las hace tener utilidades después de impuestos de $(1 - \tau)\Pi_C$. Restando de la utilidades económicas el pago de los impuestos, que corresponden a $\tau\Pi_c$, tenemos que las utilidades económicas después de impuestos de esta empresa serán:

$$\Pi = (1 - \tau)f(K) - (1 + r - \tau(rb + d))K. \quad (4.25)$$

Note que sólo en el caso que $b = 1$, es decir todo el capital se financia con deuda, $d = 1$, es decir se deprecia exactamente todo el capital, las utilidades contables serán iguales a las económicas y por lo tanto el sistema tributario no afectará el capital deseado.

Derivando la ecuación (4.25) e igualando a cero para determinar el capital óptimo, llegamos a:

$$f'(K) = \frac{1 + r - \tau(br + d)}{1 - \tau}. \quad (4.26)$$

Si $b = 1$ y $d = 1$, el término $1 - \tau$ se cancela en el numerador y denominador, y la decisión de capital es igual a que si no hubieran impuestos. Claramente si $d + br < 1 + r$, el capital deseado cuando hay impuestos será menor que el capital sin impuestos, y por lo tanto el sistema tributario y los aumentos de impuestos reducen el capital deseado.

Una manera de incentivar la inversión sería tener $d > 1$, lo que representa la aplicación de depreciación acelerada o un crédito tributario a la inversión.

La inflación también afecta negativamente la inversión. En general los sistemas tributarios no están indexados, lo que genera que la inflación reduzca la inversión. Por ejemplo, al imputarse la depreciación nominal para la depreciación contable, un aumento de la inflación reduce el valor real del capital que está siendo depreciado, reduciendo los descuento por depreciación en términos reales. Esto a su vez reduce el capital deseado.

Otro aspecto que aquí no discutimos es como se determina b , parámetro que hemos supuesto exógeno. En la medida que endeudarse tiene una ventaja tributaria a usar capital propio, las empresas tendrán un sesgo al elegir su forma de financiamiento a favorecer la deuda por sobre el capital propio que proviene de las utilidades retenidas.²⁴ Sin embargo, los bancos en general no financiarán el total de la inversión de una empresa, de modo que no podrán elegir $b = 1$. Esto será particularmente válido para empresas pequeñas y con poca historia, que hará a los bancos más conservadores al prestarles.

Hemos encontrado algunas condiciones bajo las cuales los impuestos a las empresas pueden no afectar, tal como se repite en las discusiones populares, la

²⁴De hecho esta es una de las razones por las cuales se plantea que el teorema de Modigliani-Miller, una de las proposiciones más famosas en finanzas corporativas, no se cumple. El teorema de Modigliani-Miller plantea que las firmas están indiferentes en la forma de financiar su inversión si es con deuda o levantando capital.

inversión. Sin embargo hay dos elementos muy importantes que matizan este resultado y deben ser tomados en cuenta:

- Este análisis es de equilibrio parcial y considera sólo como cambia la demanda por inversión con los impuestos, sin explorar lo que ocurre con el ahorro, y más en general con la acumulación de capital, cuando los impuestos a las empresas suben. Aunque el ahorro tenga una sensibilidad baja a la tasa de interés actual, los impuestos a las empresas afectan todo el flujo de retornos del ahorro, lo que probablemente reduzca, en equilibrio general, la inversión.
- Tal como discutimos en la sección 4.9, cuando las empresas enfrentan restricciones de liquidez, los flujos de caja, en consecuencia las utilidades después de impuestos, son importantes determinantes de la inversión. Cuando los impuestos suben, las utilidades de las empresas caen, y por lo tanto tienen menos recursos disponibles para invertir. Este es un mecanismo adicional a través del cual los impuestos pueden reducir la inversión, por la vía de afectar a las empresas con mayores dificultades para endeudarse.

4.11. Problemas

1. **Inversión.** Considere una empresa (o conjunto de empresas) que está considerando invertir en una serie de proyectos. La empresa tiene una gran cantidad de proyectos indizados por j , con $j=1, 2, 3, \dots$ (hay muchos proyectos y nunca se llegará al final así que no se preocupe).

Cada proyecto dura un período y contempla una inversión de K unidades de un bien de capital. Las K unidades del bien de capital cuestan al momento de planificación P_0 , y se pueden vender al final del proyecto a un precio conocido de antemano e igual a P_1 (todo está medido en UF's para ignorar la inflación). La tasa de interés real es igual a r por período. Cada proyecto genera un retorno de V_j , donde los V_j están ordenados de modo que $V_1 > V_2 > V_3 > \dots$. Para ser más explícito suponga que $V_j = v/j$. Responda:

- a) ¿Cuánto es la inversión total si se realizan los j proyectos más rentables (tome j como dado para responder esto)?
- b) Dados los parámetros anteriores, y suponiendo que $P_0 > P_1/(1+r)$, determine el valor de j (ignore problemas de que el valor es un entero y puede suponer una variable continua) del último proyecto que conviene realizar. ¿Cuánto es la inversión en este caso?

- c) Discuta que ocurre si $P_0 < P_1/(1+r)$. Le parece razonable. De argumentos económicos.

2. **Inversión y tasa de interés** Suponga que el stock deseado de capital viene dado por:

$$K^* = \frac{vY}{R}. \quad (4.27)$$

Donde v es constante y R denota el costo de uso del capital.²⁵

- a) Suponga que el producto de la economía está fijo en Y^* . Determine si un incremento permanente en la tasa de interés tendrá un efecto transitorio o permanente sobre la inversión. Considere tanto el caso en que no hay costos de ajuste (capital efectivo igual a capital deseado) como el caso en que

$$I_t = \lambda(K_{t+1}^* - K_t),$$

con $0 < \lambda < 1$.

- b) La ecuación de inversión Keynesiana supone que $I = I(r)$, con $I'(r) < 0$. ¿Es este supuesto consistente con el resultado de la parte (a)?
- c) Suponga ahora que el producto crece cada período en una cantidad fija, de modo que $\Delta Y = g$. Suponiendo que no hay costos de ajuste, ¿cambia su respuesta a la parte (b)?

3. **Inversión e incertidumbre** Suponemos que la incertidumbre que enfrenta la firma tiene su origen en que al momento de elegir su stock de capital no conoce el salario que pagará a sus trabajadores. En cambio, al momento de contratar los trabajadores, sí conoce el salario. La firma maximiza el valor esperado de sus utilidades. Sus utilidades, como función del capital (K), trabajo (L) y salario (w) vienen dadas por:

$$\pi(w, K, L) = 2K^{\gamma/2}L^{1/2} - wL - K,$$

donde $0 < \gamma < 1$ y hemos supuesto que el precio del capital es uno. Además suponemos que el salario w puede tomar dos valores, igualmente probables, los cuales son $w_0(1+\alpha)$ y $w_0(1-\alpha)$, donde $0 < \alpha < 1$ captura el grado de incertidumbre (mientras mayor es α , más incierto es el salario que deberá pagar la firma). Nótese también que el salario *esperado* es igual a w_0 , es decir, no depende de α .

Muestre que el capital deseado por la firma es una función *creciente* del parámetro α .

²⁵Por lo visto en clases, un caso particular en que se cumple (4.27) es cuando la función de producción de la firma es Cobb-Douglas y el precio (real) del bien que vende la firma permanece constante.

4. **Inversión y costos de ajustes** Suponga que la demanda por inversión de una economía esta dada por:

$$I_t = \lambda(K^* - K_{t-1})$$

donde K^* es el nivel *deseado* de capital que esta dado por:

$$K^* = 0,1 \frac{Y}{R}$$

donde Y es el producto y R es la tasa de interés. Se supone que no hay depreciación. Asuma que $R = 0,05$, $\lambda = 0,25$.

- a) Interprete económicamente el termino λ .
 - b) Calcule el nivel de inversión del año 1 si el producto de ese año es 400 y el stock de capital del período anterior es 400.
 - c) Suponga ahora que debido a un avance tecnológico, el valor de λ aumenta al doble. Como cambia su respuesta a la parte anterior.
 - d) De alguna intuición económica de por qué su respuesta no es la misma en la parte (b) y (c).
5. **Irreversibilidad y el Beneficio de Esperar.** Considere un proyecto de inversión que requiere invertir 100 hoy día. Una vez realizado el proyecto, este rinde un flujo F el período siguiente, y después se acaba el proyecto y el valor residual es cero. Suponga una tasa de interés por período es constante e igual a 10 %.
- a) Si el proyecto da un retorno cierto F igual a 130 calcule el valor esperado y diga si conviene o no hacerlo. ¿Conviene postergar el proyecto?
 - b) Suponga ahora que el proyecto tiene un retorno incierto, con un retorno de 180 u 80, ambos con la misma probabilidad (1/2 por supuesto). ¿Cuál es el valor presente esperado de invertir?
 - c) Suponga que el inversionista espera un período a “que se resuelva la incertidumbre”, es decir sabrá el siguiente período si los retornos futuros serán 180 u 80 (por ejemplo se puede observar si producto logrará ser exitoso).²⁶ ¿Cuál es el valor presente si ocurren los flujos altos de 180? ¿Y cuál si ocurren los flujos bajos? ¿Qué hará en consecuencia el inversionista si se revela que los flujos serán bajos?

²⁶El inversionista no necesita invertir en el segundo período para saber si los flujos sean bajos o no, sólo observa la realidad.

- d) Basado en la respuesta anterior. ¿Cuál es el valor presente esperado si se posterga un período la realización del proyecto? ¿Conviene esperar? Discuta su resultado.

