IN701
Primer Semestre, 2006

Guía de Problemas 4

Problema 1 Considere una economía de intercambio y una asignación factible $\{x_i^*\}_{i\in I}$. Decimos que una coalición $S \subset I$ bloquea $\{x_i^*\}_{i\in I}$ si
(a) $x_i \succ_i x_i^*$ para todo $i \in S$.
(b) $\sum\limits_{i\in S} x_i = \sum\limits_{i\in S} \omega_i$.
Decimos que la asignación $\{x_i^*\}_{i\in I}$ pertenece al núcleo de la economía si no existe una coalición $S \subset I$ que bloquee a $\{x_i^*\}_{i\in I}$.

(i) Demuestre que si $\{\{x_i^*\}_{i\in I}, p^*\}$ es un equilibrio Walrasiano, entonces $\{x_i^*\}_{i\in I}$ está en el núcleo.

(ii) Encuentre un ejemplo con preferencias continuas, estrictamente convexas y fuertemente monótonas donde hay asignaciones que están en el núcleo pero no son parte de un equilibrio competitivo para ningún precio p^*.

(iii) Considere el problema 4 de la guía 3. Encuentre el núcleo de cada una de las economías.

Problema 2 El teorema de imposibilidad de Arrow implica que las siguientes 6 propiedades de $F : K \subset L^N \longrightarrow L^*$ no se pueden satisfacer simultáneamente:
(a) $K = L^I$
(b) $N \geq 3$
(c) F está bien definida ($F(\succ_1, ..., \succ_N) \in L^*$)
(d) IAI
(e) PO
(f) No dictatorialidad

Encuentre ejemplos de funciones de bienestar social que satisfacen todas las propiedades menos una. Sea riguroso, particularmente en la explicación de porque una propiedad falla.

Problema 3 Considere $A \subset \mathbb{R}$ y la relación de orden usual en $\mathbb{R}$, denotada por $\geq$. Demuestre que si las preferencias $\succeq_i$ definidas en A son estrictamente convexas, entonces son unimodales con respecto a $(A, \geq)$.

Problema 4 Considere el conjunto de opciones $A = \{a, b, c\}$ y las preferencas que generan un ciclo de Condorcet, esto es

$$a \succ_1 b \succ_1 c$$
$$b \succ_2 c \succ_2 a$$
$$c \succ_3 a \succ_3 b$$

Demuestre que no importa cual sea el orden $\geq$ que se imponga en A, las preferencias $\{\succ_i\}$ nunca son todas unimodales con respecto a $(A, \geq)$.

Problema 5 Para una elección presidencial con multiples candidatos, se propone el siguiente sistema: cada votante entrega un ranking estricto de preferencias. En una primera ronda, sólo se toma en cuenta el candidato más deseado por cada votante. Si no hay mayoría absoluta, el candidato con menos votos se elimina de las preferencias y se repite el proceso anterior. Esto se repite hasta que haya un candidato ganador. En caso de empates se elige lexicográficamente. Considere el caso en que hay más de 3 candidatos.

(i) Si se utiliza el sistema anterior para generar una función de bienestar social (donde los candidatos eliminados más temprano son los menos preferidos). Se cumple IAI? Se obtiene siempre una relación transitiva?

(ii) Si se utiliza el sistema anterior para generar una función de elección social, es dictatorial? es estrategizable?

Problema 6 Suponga que hay un número impar I de agentes. Cada agente i tiene un nivel de riqueza inicial w_i y una función de utilidad creciente en los niveles de riqueza. La riqueza media es $\bar{w}$ y la riqueza mediana es w^*.

(i) En una sociedad donde la riqueza está muy concentrada, digamos $w_1 = K$ y $w_2 = ... = w_5 = k$, con $K >> k$, que es mayor, $\bar{w}$ o w^*?

(ii) Considere la propuesta de un impuesto proporcional $t \in [0, 1]$. Lo recolectado en impuestos se distribuye en partes iguales a los agentes. Entonces el conjunto de opciones posibles es $A = [0, 1]$ y la riqueza, después de impuestos, de cada agente, es $(1 - t)w_i + t\bar{w}$. Demuestre que las preferencias de los agentes son unimodales con respecto a $(A, \geq)$ y que, si se utiliza el esquema visto en clases, el impuesto elegido es $t = 0$ o $t = 1$, dependiendo de si $w^* > \bar{w}$ o $w^* < \bar{w}$. Interprete.

(iii) Ahora, suponga que los impuestos generan una pérdida social: una tasa de impuestos t desincentiva el trabajo, y genera un nivel de riqueza (antes de impuestos) de $(1-t)w_i$. Entonces, la recaudación promedio es de $t(1 - t)\bar{w}$ y la riqueza de cada agente después de impuestos es $(1 - t)^2 w_i + t(1 - t)\bar{w}$. Demuestre que las preferencias de los agentes son unimodales con respecto a $(A, \geq)$ y que, si se utiliza el esquema visto en clases, el impuesto elegido satisface que $t \leq \frac{1}{2}$ y que $t = 0$ o $t > 0$ dependiendo de si $w^* > \frac{1}{2}\bar{w}$ o $w^* < \frac{1}{2}\bar{w}$. Compare con la solución a la parte (ii) e interprete.