IN701
Primer Semestre, 2006

Guía de Problemas 1

En los problemas 1 y 2, asuma el modelo de equilibrio parcial visto en clases. Los problemas 1 y 4 son obligatorios en la tarea 1. El problema 5 es optativo (agrega 10% del total de puntos de la tarea).

Problema 1 (Segundo Teorema del Bienestar) Considere una asignación $(x_1^*, ..., x_I^*, q_1^*, ..., q_J^*)$ que es Pareto eficiente, y un vector de utilidades $(u_1^*, ..., u_I^*)$ que satisface $\sum_{i=1}^{I} u_i^* = \sum_{i=1}^{I} \phi_i(x_i^*) - \sum_{j=1}^{J} c_j(q_j^*) + w_m$. Denote por μ^* el multiplicador de Lagrange asociado al problema del planificador social en el óptimo.

(i) Demuestre que, para cualquier vector de transferencias $(T_1, ..., T_I)$, el precio $p^* = \mu^*$ y el vector de asignaciones $(x_1^*, ..., x_I^*, q_1^*, ..., q_J^*)$ constituyen un equilibrio competitivo.

(ii) Considere ahora el vector de transferencias $(\overline{T}_1, ..., \overline{T}_I)$ dado por $\overline{T}_i = u_i^* - w_{i,m} - \sum_{j=1}^{J} \theta_{ij}(p^* q_j - c_j(q_j^*)) + p^* x_i^* - \phi_i(x_i^*)$. Demuestre que con este vector de transferencias, en equilibrio cada agente obtiene un nivel de utilidad exactamente igual a u_i^*.

(iii) Demuestre que $\sum_{i=1}^{I} \overline{T}_i = 0$

Problema 2 Considere una economía en la que el planificador central maneja el sector productivo. Éste se compone de J firmas, cada una con una función de costos $c_j(q_j)$. Defina $C(q)$, el costo minimizado por el planificador central de producir una cantidad q:

$$
\begin{aligned}
C(q) = \quad & \min_{(q_1,\ldots,q_J)\geq 0} \quad \sum_{j=1}^{J} c_j(q_j) \\
& s.t. \quad \sum_{j=1}^{J} q_j \geq q
\end{aligned}
$$

(i) Derive las condiciones de primer orden de éste problema

(ii) Demuestre que en la asignación óptima $(q_1^*, ..., q_J^*)$ se tiene que $C'(q) = c_j'(q_j^*)$ para todo $q_j^* > 0$. Además, $C'(q) \leq c_j'(q_j^*)$ para todo $q_j^* = 0$.

(iii) Explique intuitivamente que significa el resultado anterior. También intuitivamente, explique por qué no puede ser que $c_j'(q_j^*) > c_k'(q_k^*)$ en el óptimo.

(iv) Demuestre que si todas las firmas maximizaran ganancias y enfrentaran un precio $p = C'(q)$ (con el precio del numerario igual a 1), entonces las decisiones de producción resultarían en una producción agregada de q. Concluya entonces que $C'(\cdot)$ es la inversa de la función de oferta agregada $q(\cdot)$.

(v) Cómo puede ligarse el resultado anterior con el primer teorema del bienestar?

Problema 3 Suponga que para cada individuo hay una función de placer que sólo depende de su propio consumo y está dada por $u_i(x_i)$. La función de utilidad de cada individuo depende de su propia función de placer y de la función de placer de cada otro individuo de la siguiente forma:.

$$U_i(x_1, ..., x_I) = U_i(u_1(x_1), u_2(x_2), ..., u_I(x_I)) \tag{1}$$

Muestre que si $x = (x_1, ..., x_I)$ es Pareto óptimo relativo a los U_i's, entonces $x = (x_1, ..., x_I)$ es Pareto óptimo relativo a lo u_i's. Implica esto que una comunidad de altruistas puede usar los mercados competitivos para obtener un Pareto óptimo?

Problema 4 Considere una economía con 3 consumidores y sin firmas. Existen 2 bienes, el bien 1 es servicios de jardinería y el segundo es comida. Los agentes 1 y 2 se producen mutuamente externalidades positivas debido al consumo de servicios de jardinería. Sus funciones de utilidades vienen dadas por:

$$\begin{aligned} u^1(x_{1,1}, x_{1,2}, x_{2,1}) &= v(x_{1,1}) + v(x_{2,1}) + x_{1,2} \\ u^2(x_{2,1}, x_{2,2}, x_{1,1}) &= v(x_{2,1}) + v(x_{1,1}) + x_{2,2} \end{aligned}$$

donde $v' > 0$ y $v'' < 0$.

El agente 3 no sufre ni genera externalidades. Su función de utilidad viene dada por

$$u^3(x_{3,1}, x_{3,2}) = v(x_{3,1}) + x_{3,2}$$

(i) Suponga que las dotaciones iniciales vienen dadas por $(w_{1,1}, w_{2,1}, w_{3,1}) = (1, 1, 1)$ y $(w_{1,2}, w_{2,2}, w_{3,2}) = (1, 1, 1)$. Calcule el equilibrio competitivo de esta economía.

(ii) Calcule el conjuto de asignaciones que son Pareto eficiente. Es el equilibrio de la parte (i) un elemento de este conjunto? si su respuesta es no, compare el tipo de asignaciones de la parte (ii) con el equilibrio de (i) y explique intuitivamente donde se encuentra la diferencia.

Problema 5 Los individuos pueden construír sus casas en uno de dos barrios, A y B. Existe un costo c_K de construír en el barrio K con $c_B < c_A$. Existe un nivel de prestigio θ asociado a cada agente, y este parámetro está distribuído uniformemente en $[0, 1]$ en la población. Por lo tanto, veremos a cada agente como un punto en el intervalo [0,1]. El prestigio de un barrio viene dado por el promedio de θ en esebarrio, y lo denotamos por $\overline{\theta}_K$.

Si un individuo de parámetro θ construye su casa en el barrio K, su utilidad vendrá dada por

$$U(\theta, k) = (1 + \theta)(1 + \overline{\theta}_K) - c_k$$

Esto implica que los individuos con mayor prestigio valoran más el prestigio social del barrio. En lo que sigue asumiremos que $c_A, c_B < 1$ y que $c_A - c_B \in (\frac{1}{2}, 1)$.

A continuación supondremos que todos los individuos escogen simultáneamente donde construír, y consideramos el equilibrio de Nash de ese juego. Más aún, dado que los agentes son un punto en el intervalo [0,1], un cambio unilateral de barrio no afecta los promedios $\hat{\theta}_K$.

(i) Demuestre que en cualquier equilibrio se construye en ambos barrios.

(ii) Demuestre que en cualquier equilibrio, todos los habitantes del barrio A tienen un nivel de prestigio mayor que cualquiera de los habitantes del barrio B. Esto es, existe un nivel de corte $\hat{\theta}$: todos los individuos con prestigio $\theta \geq \hat{\theta}$ construyen en la vecindad A y todos los con $\theta < \hat{\theta}$ construyen en la vecindad B.

(iii) Demuestre que $th\hat{e}ta = 2(c_A - c_B) - 1$ (Utilice que el agente de prestigio $\hat{\theta}$ es aquel que está indiferente entre costruír en el barrio A o B).

(iv) Demuestre que en un equlibrio con nivel de corte $\hat{\theta}$, la utilidad total de la economía es

$$\int_0^{\hat{\theta}} [(1+\theta)(1+\frac{\hat{\theta}}{2}) - c_A] d\theta + \int_{\hat{\theta}}^{1} [(1+\theta)(1+\frac{1+\hat{\theta}}{2}) - c_B] d\theta$$

(v) Calcule $\frac{dU}{d\hat{\theta}}$ y concluya que en el nivel de corte calculado en la parte (iii), la elección de barrios no es Pareto eficiente (un nivel de corte más bajo, sumado a transferencias de dinero a los consumidores podría mejorar a algunos sin desmejorar a nadie). Explique como sería esta reasignación.

(vi) Interprete el hecho que el nivel de corte en equilibrio es muy alto cuando se le compara al nivel Pareto-eficiente, a la luz de lo visto en clases: "si una actividad genera externalidades negativas, entonces el nivel de esta actividad es muy alto en equilibrio. Si la externalidad generada es positiva, entonces el nivel de la actividad es muy bajo en equilibrio".