Universidad de Chile
Departamento de Ingeniería Industrial
Semestre Otoño 2001

*IN701: Microeconomía I*
*Prof.: Pablo Serra B.*
*Aux.: Andrés Hernando G.*

**Control 1**
24 de Abril de 2001

1. Considere la siguiente función de utilidad:

$$u = 2x^{1/2} + 4y^{1/2}$$

(a) Encuentre las funciones de demanda $x$ e $y$ en función de los precios y la riqueza $w$ del individuo.
El problema del individuo es:

$$\begin{aligned} \max_{x,y} \quad & 2x^{1/2} + 4y^{1/2} \\ \text{s.a.} \quad & \\ & p_x x + p_y y = w \end{aligned} \tag{1}$$

Las CPO's de este problema son:

$$x^{-1/2} = \lambda p_x \tag{2}$$
$$2y^{-1/2} = \lambda p_y \tag{3}$$

Lo que conduce a:

$$\frac{y}{4x} = \left(\frac{p_x}{p_y}\right)^2$$

Reemplazando este resultado en la restricción presupuestaria:

$$\begin{aligned} w &= p_x x + 4p_y \frac{p_x^2}{p_y^2} x \\ &= \left[p_x + 4\frac{p_x^2}{p_y}\right] x \\ &= \frac{p_x(p_y + 4p_x)}{p_y} x \end{aligned}$$
$$x = \frac{wp_y}{p_x(p_y + 4p_x)} \tag{4}$$
$$y = \frac{4wp_x}{p_y(p_y + 4p_x)} \tag{5}$$

(b) Encuentre las funciones de demanda compensada $h_x$ y $h_y$.
El dual del problema (1) es:

$$\begin{aligned} \min_{x,y} \quad & p_x x + p_y y \\ \text{s.a.} \quad & \\ & u = 2x^{1/2} + 4y^{1/2} \end{aligned}$$

Las CPO's de este problema son:

$$\begin{aligned} \lambda x^{-1/2} &= p_x && (6) \\ \lambda 2y^{-1/2} &= p_y && (7) \end{aligned}$$

Que, nuevamente conducen a:

$$y^{1/2} = 2x\frac{p_x}{p_y}$$

Reemplazando este resultado en la restricción de utilidades:

$$\begin{aligned} u &= 2x^{1/2} + 4\frac{2p_x}{p_y}x^{1/2} \\ &= \frac{2(p_y+4p_x)}{p_y}x^{1/2} \\ h_x &= \frac{u^2p_y^2}{4(p_y+4p_x)^2} && (8) \\ h_y &= \frac{u^2p_x^2}{(p_y+4p_x)^2} && (9) \end{aligned}$$

(c) Encuentre la función de gasto $e(\cdot)$ y verifique que $h_i = \frac{\partial e}{\partial p_i}$.

En equilibrio:

$$e(u,p) = p_xx + p_yy = p_xh_x + p_yh_y$$

Luego:

$$\begin{aligned} e(u,p) &= \frac{u^2p_xp_y^2}{4(p_y+4p_x)^2} + \frac{u^2p_x^2}{(p_y+4p_x)^2} \\ e(u,p) &= \frac{u^2p_xp_y}{4(p_y+4p_x)} \end{aligned}$$

Además:

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial p_x} &= \frac{4u^2p_y(p_y+4p_x) - 16u^2p_xp_y}{16(p_y+4p_x)^2} \\ &= \frac{u^2p_y^2}{4(p_y+4p_x)^2} \\ &= h_x \end{aligned}$$

Del mismo modo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial p_y} &= \frac{u^2 4(p_y+4p_x) - 4u^2p_xp_y}{16(p_y+4p_x)^2} \\ &= \frac{4u^2p_xp_y + 16u^2p_x^2 - 4u^2p_xp_y}{16(p_y+4p_x)^2} \\ &= \frac{u^2p_x^2}{(p_y+4p_x)^2} \\ &= h_y \end{aligned}$$

(d) Encuentre la función de utilidad indirecta y verifique la identidad de Roy.

La función de utilidad indirecta $v(p, w)$ es:

$$\begin{aligned}
v(p,w) &= 2x^{1/2} + 4y^{1/2} \\
&= \frac{2w^{1/2}p_y^{1/2}}{p_x^{1/2}(p_y+4p_x)^{1/2}} + \frac{8w^{1/2}p_x^{1/2}}{p_y^{1/2}(p_y+4p_x)^{1/2}} \\
&= \frac{2w^{1/2}p_y + 8w^{1/2}p_x}{(p_xp_y)^{1/2}(p_y+4p_x)^{1/2}} \\
&= \frac{2w^{1/2}(p_y+4p_x)}{(p_xp_y)^{1/2}(p_y+4p_x)^{1/2}} \\
&= \frac{2w^{1/2}(p_y+4p_x)^{1/2}}{(p_xp_y)^{1/2}}
\end{aligned}$$

Notando que:

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{\partial v}{\partial p_x}}{\frac{\partial v}{\partial w}} &= \frac{\frac{4w^{1/2}(p_xp_y)^{1/2}(p_y+4p_x)^{-1/2} - w^{1/2}(p_y+4p_x)^{1/2}p_y^{1/2}p_x^{-1/2}}{p_x py}}{\frac{(p_y+4p_x)^{1/2}}{w^{1/2}(p_xp_y)^{1/2}}} \\
&= \frac{\frac{\frac{4w^{1/2}(p_xp_y)^{1/2}}{(p_y+4p_x)^{1/2}} - \frac{w^{1/2}(p_y+4p_x)^{1/2}p_y^{1/2}}{p_x^{1/2}}}{p_xp_y}}{\frac{(p_y+4p_x)^{1/2}}{w^{1/2}(p_xp_y)^{1/2}}} \\
&= \frac{\frac{4w^{1/2}p_xp_y^{1/2} - w^{1/2}(p_y+4p_x)p_y^{1/2}}{p_x^{3/2}p_y(p_y+4p_x)^{1/2}}}{\frac{(p_y+4p_x)^{1/2}}{w^{1/2}(p_xp_y)^{1/2}}} \\
&= -\frac{\frac{w^{1/2}p_y^{1/2}}{p_x^{3/2}(p_y+4p_x)^{1/2}}}{\frac{(p_y+4p_x)^{1/2}}{w^{1/2}(p_xp_y)^{1/2}}} \\
&= -\frac{wp_yp_x^{1/2}}{p_x^{3/2}(p_y+4p_x)} \\
&= -\frac{wp_y}{p_x(p_y+4p_x)} \\
&= -x
\end{aligned}$$

Verificamos que se cumple la identidad de Roy.

2. Suponga una industria en la que todas las firmas producen utilizando la siguiente función de producción:

$$q = \left[\min\left(\frac{K}{a}, \frac{L}{1-a}\right)\right]^{1/2} \qquad 0 < a < 1$$

Además, cada firma que desea producir una cantidad positiva debe pagar un *royalty* de 16 al dueño de la patente del producto.

Los precios de los insumos son $r = w = 1$ y la demanda por el producto es:

$$200 - P = D$$

(a) Encuentre el equilibrio de largo plazo en esta industria.

El problema de la firma es de minimizar sus costos dada la producción deseada. En este caso tenemos las siguientes particularidades:

- La función de producción exhibe retornos decrecientes a escala.
- Los insumos productivos son complementarios perfectamente, es decir, la sustitución entre insumos no es posible.

Del segundo punto desprendemos que, para producir a mínimo costo la firma deberá mantener *stocks* de insumos tales que:

$$\frac{K}{a} = \frac{L}{1-a}$$

es decir:

$$K = \frac{a}{1-a}L.$$

Con esto, tenemos que:

$$\min\left(\frac{K}{a}, \frac{L}{1-a}\right) = \frac{L}{1-a} = \frac{K}{a},$$

luego:

$$q^2 = \frac{K}{a} = \frac{L}{1-a}.$$

Entonces:

$$\begin{aligned} C(q) &= rK + wL + 16\,\mathbb{I}[q > 0] \\ &= raq^2 + w(1-a)q^2 + 16\,\mathbb{I}[q > 0] \\ &= 2q^2 + 16\,\mathbb{I}[q > 0] \end{aligned}$$

donde $\mathbb{I}[\cdot]$ es la indicatriz ($\mathbb{I}[x] = 1$ si $x$ es verdadero y 0 si no).

En el largo plazo, no hay incentivos para que entren nuevas firmas a la industria, en general, esto quiere decir que, cualquier firma que ingresara, lo haría en condiciones tales que tendría utilidades (estrictamente) negativas. Por ello, las firmas al interior de la industria que sean iguales a cualquier potencial ingresante deben tener utilidades no (estrictamente) positivas. Es decir, de 0. Esto implica que las firmas venden a costo medio mínimo.

$$\begin{aligned} CMe &= 2q + \frac{16}{q} \\ CMg &= 4q \\ 4q &= 2q + \frac{16}{q} \\ q &= 4 \end{aligned}$$

Luego, el precio es de 8. Se demandan 192 unidades y existen 48 firmas en la industria en el equilibrio de largo plazo.

Suponga que, a partir del equilibrio encontrado en (a) y producto de un boom de popularidad del producto, la demanda se transforma en:

$$400 - 2P = D$$

En el corto plazo, las firmas pueden variar su contratación de trabajo pero no de capital. En el largo plazo las cantidades contratadas de ambos insumos son variables y pueden entrar y salir firmas de la industria.

(b) Encuentre el nuevo equilibrio de corto plazo. (*Hint: Cuidado con la elasticidad de corto plazo de la oferta.*)

Que en el corto plazo pueda variar sólo uno de los insumos implica que la oferta de corto plazo de la firma es completamente inelástica (en realidad, que pueda variar sólo uno o que no pueda variar ninguno son casos equivalentes), en consecuencia, se siguen ofreciendo 192 unidades que ahora tienen un precio de 104 cada una.

(c) Encuentre el nuevo equilibrio de largo plazo de la industria.

En el largo plazo, el precio vuelve a la cantidad que equilibra el número de firmas. En este caso, 8. Luego, a dicho precio se demandarán 384 unidades, habrá 96 firmas cada una produciendo 4 unidades.

3. Una firma produce en dos turnos de doce horas cada uno. Los trabajadores del turno día reciben un salario diario de $w$, los trabajadores del turno noche reciben un sobrepago de tasa $b$ por concepto de horas extra, de modo que su salario diario es $w(1+b)$. El capital se arrienda por día a un costo de $r$. Sean $L_d$ y $L_n$ el número de trabajadores en el turno día y en el turno noche, respectivamente. Sea $K$ el capital disponible y $Q_i$ la producción en un turno ($i = \{d, n\}$). Entonces, la tecnología de la firma se resume en la siguiente función de producción:

$$Q_i = K^{1/2} L_i^{1/2} \qquad i = \{d, n\}$$

(a) Describa el problema de la firma. Encuentra las condiciones de optimalidad e interprételas.

El problema de la firma es:

$$\begin{aligned} \max_{K, L_d, L_n} \quad & rK + wL_d + w(1+b)L_n \\ \text{s.a.} \quad & \\ & Q = K^{1/2}(L_d^{1/2} + L_n^{1/2}) \end{aligned} \tag{10}$$

Las condiciones de primer orden son:

$$r = \frac{\lambda}{2} K^{-1/2}(L_d^{1/2} + L_n^{1/2}) \tag{11}$$

$$w(1+b) = \frac{\lambda}{2} K^{1/2} L_n^{-1/2} \tag{12}$$

$$w = \frac{\lambda}{2} K^{1/2} L_d^{-1/2} \tag{13}$$

Estas condiciones son las típicas: En el óptimo la relación entre la productividad marginal y el precio del insumo es igual para todos los insumos.

(b) Derive la relación entre $L_d$ y $L_n$ en la solución. ¿Cómo depende de b el cuociente $L_d/L_n$?

Dividiendo la relación (12) en (13):

$$(1+b)^2 = \frac{L_d}{L_n} \tag{14}$$

Luego, si $b$ aumenta, la contratación en el turno día respecto a la del turno noche aumenta más que proporcionalmente (en forma cuadrática).

(c) Encuentre la función de costos de la firma en función de $Q = Q_d + Q_n$ y los demás parámetros del problema.

Usando la condición (14), la cpo (11) es:

$$r = \frac{\lambda}{2} K^{-1/2} L_n^{1/2}(2+b) \tag{15}$$

Dividiendo (15) en (12), se obtiene:

$$\frac{r}{w}\frac{k}{(1+b)(2+b)} = L_n \tag{16}$$

Del mismo modo, aplicando de nuevo (14):

$$\frac{r}{w}\frac{k(1+b)}{(2+b)} = L_d \tag{17}$$

Reemplazando (16) y (17) en la restricción:

$$\begin{aligned}
Q &= K^{1/2}\left(\left(\frac{r}{w}\right)^{1/2}\frac{K^{1/2}}{(1+b)^{1/2}(2+b)^{1/2}} + \left(\frac{r}{w}\right)^{1/2}\frac{(1+b)^{1/2}}{(2+b)^{1/2}}\right) \\
&= K\left(\frac{r}{w}\right)^{1/2}\left[\frac{1}{(1+b)^{1/2}(2+b)^{1/2}} + \frac{(1+b)^{1/2}}{(2+b)^{1/2}}\right] \\
&= K\left(\frac{r}{w}\right)^{1/2}\left[\frac{1+(1+b)}{(1+b)^{1/2}(2+b)^{1/2}}\right] \\
&= K\left(\frac{r}{w}\right)^{1/2}\frac{(2+b)^{1/2}}{(1+b)^{1/2}} \\
K &= \left(\frac{w}{r}\right)^{1/2}\left[\frac{(1+b)}{(2+b)}\right]^{1/2} Q
\end{aligned}$$

Usando (16) y (14) se tiene:

$$\begin{aligned}
L_n &= \frac{r}{w}\, frac1(1+b)(2+b)\left(\frac{w}{r}\right)^{1/2}\left[\frac{(1+b)}{(2+b)}\right]^{1/2} Q \\
&= \left(\frac{r}{w}\right)^{1/2}\left[\frac{1}{(1+b)^{1/2}(2+b)^{3/2}}\right] Q \\
L_d &= (1+b)^2\left(\frac{r}{w}\right)^{1/2}\left[\frac{1}{(1+b)^{1/2}(2+b)^{3/2}}\right] Q \\
&= \left(\frac{r}{w}\right)^{1/2}\left[\frac{(1+b)}{(2+b)}\right]^{3/2} Q
\end{aligned}$$

Luego, la función de costos es:

$$
\begin{aligned}
\phi(Q,r,w) &= rk + wL_d + w(1+b)L_n \\
&= r\left(\frac{w}{r}\right)^{1/2}\left[\frac{(1+b)}{(2+b)}\right]^{1/2} Q + w\left(\frac{r}{w}\right)^{1/2}\left[\frac{(1+b)}{(2+b)}\right]^{3/2} Q \\
&\quad + w(1+b)\left(\frac{r}{w}\right)^{1/2}\left[\frac{1}{(1+b)^{1/2}(2+b)^{3/2}}\right] Q \\
&= Q(rw)^{1/2}\left[\frac{(1+b)^{1/2}}{(2+b)^{1/2}} + \frac{(1+b)^{3/2}}{(2+b)^{3/2}} + \frac{(1+b)^{1/2}}{(2+b)^{3/2}}\right] \\
&= Q(rw)^{1/2}\left(\frac{1+b}{2+b}\right)^{1/2}\left[1 + \frac{1}{2+b} + \frac{1+b}{2+b}\right] \\
&= Q(rw)^{1/2}\left(\frac{1+b}{2+b}\right)^{1/2}\left[\frac{2+b+1+1+b}{2+b}\right] \\
&= 2Q(rw)^{1/2}\left(\frac{1+b}{2+b}\right)^{1/2}
\end{aligned}
$$

(d) Verifique la propiedad derivativa para $K$. Muestre que no se cumple para $L_d$ ni para $L_n$ (cuidado con esta última) y explique por qué.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial r} &= Q\left(\frac{w}{r}\right)^{1/2}\left[\frac{1+b}{2+b}\right]^{1/2} \\
&= K \\
\frac{\partial \phi}{\partial w} &= Q\left(\frac{r}{w}\right)^{1/2}\left[\frac{1+b}{2+b}\right]^{1/2} \\
&\neq L_d \\
\frac{\partial \phi}{\partial w(1+b)} &= Q\left(\frac{r}{w}\right)^{1/2}\left[\frac{1}{(1+b)^{1/2}(2+b)^{1/2}}\right] \\
&\neq L_n
\end{aligned}
$$

Las propiedades derivativas, para $L_n$ y $L_d$ no se cumplen ya que la planificación de capital **no es óptima** para K, por lo tanto, no se cumplen las condiciones necesarias para aplicar el teorema de la envolvente, vital para el resultado de la propiedad derivativa.