



Pauta Control 2

27 de septiembre de 2005
2 horas

Pregunta N°1

- a) Muestre que el beta de la cartera de mercado es el promedio ponderado de los betas de cada uno de los activos que componen a la cartera de mercado.

$$\beta_m = \frac{\sigma_{mm}}{\sigma_m^2} = \frac{\sigma_m^2}{\sigma_m^2} = 1 = \frac{\text{cov}(r_m, r_m)}{\sigma_m^2} = \frac{\text{cov}(r_m, \sum_i w_i r_i)}{\sigma_m^2}$$
$$1 = \frac{\text{cov}(r_m, \sum_i w_i r_i)}{\sigma_m^2} = \frac{\sum_i w_i * \sigma_{im}}{\sigma_m^2} \Leftrightarrow \sum_i w_i \beta_i = 1$$

- b) Explique qué entiende por riesgo sistemático y por riesgo específico.

- **Riesgo sistemático:** Es el riesgo inherente al propio mercado, que no puede eliminarse mediante ninguna diversificación.

- **Riesgo específico:** Es el riesgo específico de una empresa o sector, este riesgo se puede eliminar de una cartera si ésta se diversifica.

- c) Si el beta del activo A es β_A y para el activo B es β_B calcule el beta de una cartera que invierte w en A y $1-w$ en B.

Sabemos que el beta de una cartera se puede expresar como una combinación lineal entre los betas de los activos que la componen y sus respectivos pesos en la cartera, luego, el beta pedido es:

$$\beta = w * \beta_A + (1 - w) * \beta_B$$

- d) Suponga que ud construye una cartera con N activos en donde invierte (1/N) en cada uno de ellos. Estime la varianza de esta cartera cuando N es muy grande. En qué casos esta varianza podría ser cercana a cero. Comente.

$$\sigma_c^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_i \sigma_j = \left(\frac{1}{N}\right)^2 \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 + \left(\frac{1}{N}\right)^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} (\forall i \neq j)$$

$$\sigma_c^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_i \sigma_j = \left(\frac{1}{N}\right)^2 \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 + (N^2 - N) \frac{1}{N^2} COV_{prom}$$

Donde COVprom es el promedio de la covarianza.

Luego, al tender N a infinito:

$$\sigma_c^2 = COV_{prom}$$

Por lo tanto, independiente de cuantos activos agreguemos, si invertimos (1/N) en ellos, la varianza se estabilizará en la covarianza promedio de los activos. Luego, la varianza de la cartera está acotada inferiormente por la covarianza promedio y dependiendo del valor de ésta se tendrá cuan cerca de cero es el valor.

- e) Comente la frase siguiente: Un incremento en la tasa libre de riesgo hará que el precio del riesgo en el mercado disminuya.

El precio del riesgo se define para la línea de mercado de capitales como la pendiente de ésta:

Precio por riesgo = $\frac{r_m - r_f}{\sigma_m}$, luego al aumenta r_f disminuye la pendiente, por lo tanto la aseveración es verdadera. Notar que cambia r_m .

Pregunta N°2

Sea la siguiente información estadística sobre un conjunto de acciones en un mundo donde el CAPM se cumple.

	Retornos	Volatilidades	Matriz Correlaciones							
	Esp. Anuales	Anuales	UAL	SDS	INT	HP	IBM	C	BP	MSFT
UAL	10.0%	77.9%	1.00	0.00	0.03	0.13	0.12	0.24	-0.08	0.23
SDS	8.0%	42.6%	0.00	1.00	-0.10	0.20	0.23	0.34	0.17	0.11
INT	9.5%	34.0%	0.03	-0.10	1.00	0.03	0.02	0.17	0.11	0.18
HP	7.0%	37.9%	0.13	0.20	0.03	1.00	0.19	0.26	0.61	0.27
IBM	3.5%	40.4%	0.12	0.23	0.02	0.19	1.00	0.41	0.34	-0.06
C	4.0%	31.4%	0.24	0.34	0.17	0.26	0.41	1.00	0.34	0.05
BP	4.8%	20.9%	-0.08	0.17	0.11	0.61	0.34	0.34	1.00	0.04
MSFT	5.5%	34.2%	0.23	0.11	0.18	0.27	-0.06	0.05	0.04	1.00

- a) Construya una cartera con las acciones de Microsoft y Citibank (MSFT y C) que tenga el menor riesgo posible (la llamaremos Cartera 1). ¿Cuál es la rentabilidad de esta cartera?

$$\sigma_1^2 = w^2 \sigma_{MSFT}^2 + (1-w)^2 \sigma_C^2 + 2w(1-w)\rho \sigma_{MSFT} \sigma_C$$

Minimizando c/r a w:

$$\Rightarrow w \sigma_{MSFT}^2 - (1-w) \sigma_C^2 + (1-2w)\rho \sigma_{MSFT} \sigma_C = 0$$

Reemplazando los valores de la tabla:

$$w = 0,455161 \Rightarrow (1-w) = 0,544839$$

Así,

$$\bar{r}_1 = w5,5\% + (1-w)4\% = 4,68274\%$$

- b) Si ud. construye otra cartera (Cartera 2), definida por

- Cartera 2: 10% en INT y el resto en HP

Encuentre el coeficiente de correlación entre la Cartera 2 y el activo INT.

$$\bar{r}_2 = 0,1\bar{r}_{INT} + 0,9\bar{r}_{HP} \quad , \text{ luego calculamos la covarianza:}$$

$$\begin{aligned} Cov(\bar{r}_2, \bar{r}_{INT}) &= Cov(\bar{r}_{INT}; 0,1\bar{r}_{INT} + 0,9\bar{r}_{HP}) \\ &= 0,1\sigma_{INT}^2 + 0,9\rho_{INTHP}\sigma_{INT}\sigma_{HP} \end{aligned}$$

Reemplazando los valores del enunciado:

$$Cov(\bar{r}_2, \bar{r}_{INT}) = 0,015039 \Rightarrow 0,015039 = \rho_{2INT}\sigma_{INT}\sigma_2$$

Donde

$$\sigma_2^2 = 0,1^2 \sigma_{INT}^2 + 0,9^2 \sigma_{HP}^2 + 2*0,1*0,9\rho_{INTHP}\sigma_{HP}\sigma_{INT} = 0,118201$$

Por lo que

$$\rho_{2INT} = 0,128656$$

- c) Suponga que Ud. quiere invertir en dos activos que muestran las rentabilidades esperadas mayores (UAL e INT). Sin embargo, su máxima tolerancia al riesgo es de 32% (de volatilidad). ¿Qué combinación de UAL e INT le aseguran máxima rentabilidad sin exceder su tolerancia al riesgo?

$$0,32^2 = w^2 \sigma_{UAL}^2 + (1-w)^2 \sigma_{INT}^2 + 2w(1-w) \sigma_{UAL} \sigma_{INT} \rho_{UALINT}$$

Reemplazando y despejando w se obtiene:

$$w_1 = 0,218957$$

$$w_2 = 0,085374$$

Calculamos entonces el retorno para cada una de las 2 combinaciones posibles y luego comparamos:

$$\bar{r}_1 = w_1 10\% + (1-w_1) 9,5\% = 9,60948\%$$

$$\bar{r}_2 = w_2 10\% + (1-w_2) 9,5\% = 9,54269\%$$

Luego como r1 es mayor que r2, la combinación elegida es

$$w_1 = w_{UAL} = 0,218957 \Rightarrow w_{INT} = 0,781043$$

Pregunta N°3

Suponga que en un mundo en donde se cumple el CAPM, la tasa libre de riesgo es de 5%, y la cartera de mercado se estima que tiene un retorno esperado de 12%, mientras que la volatilidad de la cartera de mercado es de 30%.

- a) Si un inversionista quisiera recibir en valor esperado alrededor de 20% en rentabilidad. Cuál debiera ser la composición de su cartera (entre cartera de mercado y activo libre de riesgo), y cuánto sería el riesgo mínimo a que debiera exponerse?

$$r = \frac{0,12 - 0,05}{0,3 - 0} \sigma + 0,05$$
$$0,2 = w0,12 + (1 - w)0,05$$

Luego, despejando w:

$$w = 2,14$$
$$(1 - w) = -1,14$$

Riesgo mínimo:

$$0,2 = 0,233333\sigma + 0,05$$
$$\sigma_{\min} = 64,3\%$$

- b) Si a ud. le ofrecen un negocio (proyecto) con una rentabilidad esperada de 15%, y una volatilidad del 25%, ¿debiera tomarlo? Explique

$$0,15 = 0,233333\sigma + 0,05$$
$$\sigma = 42,3\%$$

Como 42,3% es mayor que 25%, si se toma la opción. Se estaría obteniendo un retorno esperado de 15% con menor riesgo.

- c) Si le ofrecen un segundo proyecto con una rentabilidad esperada del 8% y un beta del proyecto de 0,5, ¿debiera tomarlo? Explique

$$R_i = R_f + \beta(R_M - R_f)$$
$$= 0,05 + 0,5(0,12 - 0,05) = 8,5\%$$

Como 8% es menor que 8,5%. No se debería aceptar, se está ganando menos de lo que se esperaba obtener en el mercado.

- d) Suponga que uno de los activos que conforman la cartera de mercado (Activo A) tiene una volatilidad de 50%, y un beta de 0,8. Mientras que el Activo B tiene una volatilidad de 30% y un beta de 1,2. ¿Es posible encontrar una combinación de A y B tal que el beta de esta nueva cartera sea cero? En caso afirmativo, encuentre el retorno esperado y la volatilidad de esta cartera.

Si el beta del activo A es β_A y para el activo B es β_B entonces el beta de una cartera que invierte w en A y 1-w en B es:

$$\beta = w * \beta_A + (1 - w) * \beta_B$$

Luego

$$w0,8 + 1,2(1 - w) = 0 \Rightarrow w = 3 ; (1 - w) = -2$$

$$\bar{r}_c = 3\bar{r}_A - 2\bar{r}_B$$

Donde, por CAPM

$$\begin{aligned} \bar{r}_A &= 0,05 + 0,8(0,12 - 0,05) = 0,106 \\ \bar{r}_B &= 0,05 + 1,2(0,12 - 0,05) = 0,134 \end{aligned} \Rightarrow \bar{r}_C = 0,05$$

La volatilidad se debe dejar expresada en función de un rho. No era posible obtenerla del enunciado.

Dudas y/o comentarios:

gematurana@gmail.com
ymeyer@ing.uchile.cl

