



UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL

# GUÍA CONTROL 1<sup>1</sup>: TEORÍA DE JUEGOS<sup>2</sup>

“El pensamiento estratégico es el arte de vencer al adversario, sabiendo que éste trata de hacer lo mismo que uno”.

Avinash Dixit y Barry Nalebuff, Thinking strategically (1991)

---

1 Esta guía se basa en la guía elaborada por Ignacio Llanos para el curso In51a.  
2 Cometarios a pbordon@ing.uchile.cl

## TEORIA DE JUEGOS

1. Defina y relacione en cada caso según corresponda.

- a) Equilibrio Perfecto en el subjuego - Equilibrio de Nash
- b) Conjunto de información - Estrategia
- c) Amenaza Creíble - Equilibrio Perfecto en Subjuegos

2. Supongamos el siguiente modelo de elecciones. Los electores están distribuidos en forma uni-forme en el intervalo  $[0,1]$ , que podemos interpretar como el hecho que las preferencias de los electores son uniformes entre la izquierda y derecha más extrema. Los electores siempre votan por el candidato más cercano a su posición. Por ejemplo, si el candidato 1 se ubica en 0.6 y el candidato 2 se ubica en 0.8, el candidato 1 recibe todos los votos de los agentes a la izquierda más los votos de los agentes en el segmento  $[0;6; 0;7]$ , es decir, un 70% de los votos (ver .figura 1.1). Cada uno de los dos partidos políticos elige la posición de su o sus candidatos simultáneamente. En caso de empate, el resultado se decide al azar, usando una moneda.

a) Suponga que sólo hay un cargo por circunscripción electoral (se gana por mayoría). Mostrar que para cada candidato, la estrategia de ubicarse en 0.5 es Nash. ¿Cómo se interpreta esto?

b) Suponga que el Partido 1 elige su posición antes que el partido 2. ¿Cuál es la estrategia dominante del partido 2? ¿Cuál es el equilibrio perfecto en el sub-juego?

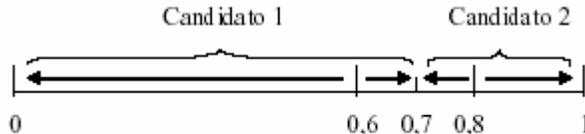


Figura 1.1: Distribucion de electores

3. Supongamos el siguiente modelo de elecciones. Los electores están distribuidos en forma uniforme en el intervalo  $[0,1]$ , que podemos interpretar como el hecho que las preferencias de los electores son uniformes entre la izquierda y derecha más extrema. Los electores siempre votan por el candidato más cercano a su posición. Por ejemplo, si el candidato 1 se ubica en 0.6 y el candidato 2 se ubica en 0.8, el candidato 1 recibe todos los votos de los electores a la izquierda más los votos de los electores ubicados en el segmento  $[0.6,0.7]$ , es decir, un 70% de los votos. Cada uno de los partidos elige la posición de su o sus candidatos simultáneamente. En caso de empate, el resultado se decide al azar, usando una moneda.

- a) Suponga que sólo hay un cargo por circunscripción electoral (se gana por mayoría). Mostrar que para cada candidato la estrategia de ubicarse en 0.5 es equilibrio de Nash. ¿Cómo se interpreta esto?
- b) Ahora, existen dos cargos por circunscripción, por lo que si un partido obtiene el 66,6% de los votos, sus dos candidatos resultan elegidos. Encuentre él o los equilibrios de Nash.

- c) ¿En que se parecen estos sistemas de elección al sistema chileno? ¿Qué problema surge si ambos sistemas electorales se aplican simultáneamente? Explique.

4. Una firma debe decidir cómo repartir sus utilidades entre accionistas y trabajadores, en forma de dividendos para los accionistas y salario para los trabajadores (suponga que en la empresa sólo existe un accionista y un trabajador). Para ello, cuenta con un ingreso bruto  $I$  esperado al final del período. El accionista ofrece un salario  $w$  al trabajador, el cual puede aceptar o rechazar la oferta. En caso de rechazar la oferta, el trabajador puede hacer una contraoferta de cuánto es lo que debiera recibir él como salario. Esta contraoferta puede ser aceptada o rechazada por el accionista. Sin embargo, si es rechazada, el trabajador se irá a huelga, lo que trae un costo  $C_H$  para la empresa. El empresario debe organizar una mesa de negociación para poner fin a la huelga. En dicha reunión, el empresario debe ofrecer un nuevo salario al trabajador, quien puede aceptar o rechazar esta nueva oferta. Si la nueva oferta es rechazada por el trabajador, éste renunciará a la empresa y tomará otro empleo en algún otro trabajo, donde recibe el salario de mercado (no especializado)  $w_0$ : Debido a la falta de trabajadores con la especialización requerida en la empresa, si el trabajador renuncia, el ingreso bruto de la empresa cae a la mitad.

- a) Plantee el árbol del juego.  
b) Resuelva el juego encontrando el equilibrio perfecto en el sub-juego.

5. Considere el caso de tres primos lejanos (Pedro, Juan y Diego) que deben repartirse una herencia de US\$1,000,000 de acuerdo a las reglas del testamento. Las reglas son:

- a) Pedro decide cómo se dividen la herencia entre los tres.  
b) Si Juan y Diego aceptan las partes que les corresponden, esta es la división aceptada.  
c) Si al menos uno de los dos no acepta, el testamento indica que la mitad de la herencia va al Hogar de Niños Huérfanos y el resto debe dividirse según un nuevo procedimiento.  
d) Pedro debe dividir la herencia en tres partes.  
e) Juan elige la parte que prefiere entre las tres.  
f) Diego elige la parte que prefiere entre las dos que quedan.  
g) Pedro se queda con el resto.

Encuentre el equilibrio perfecto en el sub.-juego de este juego. ¿Cómo cambia la solución al juego si en la segunda etapa, luego de dividir la herencia, Pedro elige primero la parte que más prefiere (luego Juan y por último Diego)?

6. En un cierto país hay tres candidatos presidenciales: A, B y C. Las preferencias de los votantes permiten dividir a la población en cuatro grupos, según muestra el siguiente cuadro:

Grupo	Porcentaje	Preferencias
I	36%	$C \succ B \succ A$
II	35%	$A \succ B \succ C$
III	17%	$B \succ A \succ C$
IV	12%	$B \succ C \succ A$

Los votantes del grupo 1 no quieren por ningún motivo que A sea presidente y los votantes de los grupos 2 y 3 bajo ninguna circunstancia quieren que C sea presidente. Gana la elección el candidato que obtiene la mayoría absoluta; si nadie obtiene más del 50% de los votos en la primera vuelta, hay una segunda vuelta con los dos candidatos que obtuvieron más votos (no existen los votos blancos y nulos).

- a) Describa el juego (jugadores, acciones y pagos o preferencias).
- b) Escriba una estrategia del grupo III.
- c) ¿Es equilibrio de Nash que todos los electores voten por aquel candidato que más les gusta? Justifique.
- d) ¿Es equilibrio de Nash que el grupo I vote por C y los restantes candidatos voten por el candidato que más les gusta? Justifique.

7. Hace unos años un nuevo comisionado tomó a su cargo la policía de Nueva York. Desde entonces la tasa de delitos ha disminuido en 32 %. Una de las innovaciones adoptadas por el Departamento de Policía consiste en lo siguiente: diariamente se computan estadísticas las que se usan para detectar aquellas zonas en las que se han cometido muchos delitos. Al día siguiente las zonas más conflictivas se inundan de policías. Usando sus conocimientos de Teoría de Juegos evalúe esta táctica de combate del crimen, indicando bajo qué circunstancias es exitosa, y bajo qué circunstancias no lo será.

8. Demuestre los siguientes resultados.

- a) Un equilibrio en estrategias dominantes es Nash.
- b) Un equilibrio de Nash no utiliza estrategias (puras) dominadas

9. Suponga que existen dos empresas. Cada una opera en un mercado distinto, pero ambos mercados están relacionados. Las funciones de demanda inversa en cada mercado son:

$$p_1 = 100 - x_1 + \alpha p_2$$
$$p_2 = 100 - x_2 + \alpha p_1$$

con  $\alpha < 1$ . Para simplificar suponga además que el costo marginal de producir cualquiera de los dos bienes es constante e igual a cero. La variable estratégica de cada empresa es el precio del bien que produce.

- a) Si  $\alpha > 0$ . ¿Qué tipo de bienes son 1 y 2 ?, ¿Y si  $\alpha < 0$ ? En cada caso de un ejemplo.
- b) Escriba la función objetivo de la primera empresa.
- c) Encuentre el equilibrio de Nash del juego en que las empresas eligen simultáneamente el precio del bien que cada una produce (Hint: antes de resolver mire las funciones de demanda inversa).
- d) Suponga que las dos empresas se fusionan, con el resultado que una sola controla ambos mercados ¿Comparado con lo que obtuvo en (b) los precios son mayores o menores?  
¿Cómo depende su respuesta del signo de  $\alpha$ ? Explique la intuición económica detrás del resultado.
- e) La Comisión Antimonopolios le pide que decida si la fusión de ambas empresas debe permitirse. ¿Qué responde?

10. Considere el juego entre tres jugadores que se muestra en la figura 1.2.

- Encuentre el equilibrio perfecto en el sub-juego.
- Encuentre un equilibrio de Nash (¡No perfecto en el sub-juego!) en que el segundo jugador se queda con 70.

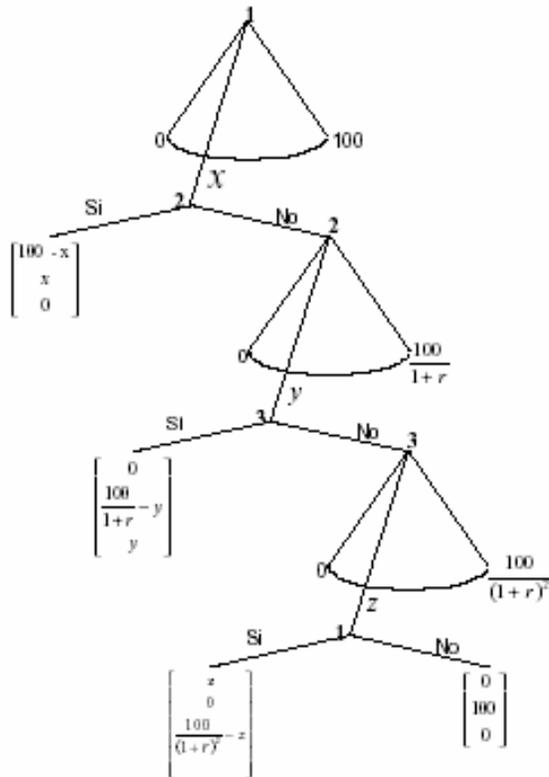


Figura 1.2: Negociación de 3 jugadores

11. El Sr. MacRon es el propietario del restaurante MacRon, el mejor de Santiago. Recientemente varios clientes han demandado al restaurante, debido a que sus famosas hamburguesas los han hecho enfermarse. El Sr. MacRon sabe que estas infecciones son provocadas por una bacteria, la que puede eliminarse si la hamburguesa está bien cocida. Por esta razón, piensa hacer inspecciones sorpresa a la cocina. El costo de una inspección (I) es  $i = 40$ , y no hay costo si no lo hace (NI). El cocinero puede elegir esforzarse (E) a un costo personal  $e = 60$ , o no esforzarse (NE). Si se esfuerza, se asegura que la hamburguesa queda bien cocida, pero si no se esfuerza todo cliente que coma hamburguesa enfermará y demandará al restaurante, con un costo total de  $d = 200$  para el Sr. MacRon. El salario que recibe el cocinero es  $w = 120$ , pero si en una inspección se detecta que no está esforzándose, es despedido perdiendo su salario. Las ventas del local son  $v = 200$ , y el único costo es el salario del cocinero.

- Escriba el juego en forma normal. Muestre y explique por qué este juego no tiene un equilibrio de Nash en estrategias puras.
- Encuentre el equilibrio de Nash en estrategias mixtas de este juego y calcule la utilidad de ambos jugadores.

- c) Su ponga que el Sr. MacRon, en vez de las inspecciones sorpresa, instala una cámara de vigilancia en la cocina, con un costo de  $c = 60$ . Tanto el cocinero como el Sr. MacRon saben que, debido a las condiciones de la cocina, la cámara puede detectar sólo con probabilidad  $k(1=2 < k < 1)$  si el cocinero se está esforzando. ¿Qué hará el cocinero en este caso?
- d) ¿Le conviene al Sr. MacRon instalar la cámara de vigilancia?

12. En el juego de la figura 1.3, el jugador tiene tres opciones: R, L y T. A su vez, el jugador 2 debe elegir entre l o t, si le toca jugar. Su problema es que no sabe si el jugador 1 jugó L o T. Este juego tiene dos equilibrios de Nash en estrategias puras: (L; l) y (R; r).

- a) Muestre que ambos equilibrios son perfectos en el sub-juego.
- b) Muestre que para cualquier sistema de creencias asociadas al conjunto de información del jugador 2, el equilibrio (R; r) es inconsistente. Es decir, si el conjunto de información del jugador 2 es alcanzado, entonces no importa la probabilidad que le asigna el jugador al nodo izquierdo (y por complementariedad al derecho), ya que el equilibrio le indica que debe usar una estrategia que no maximiza su utilidad.
- c) Muestre que el otro equilibrio se apoya en creencias que son consistentes con la regla de Bayes y por lo tanto es un EPBN.

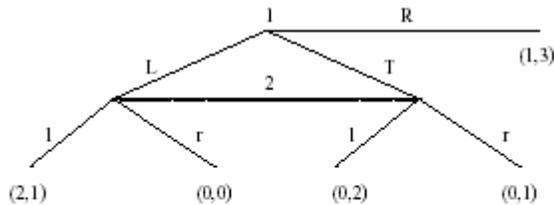


Figura 1.3: Juego Bayesiano

13. En el juego del ultimátum un filántropo ofrece un millón a dos jugadores, quienes deciden cómo repartírselos. El filántropo establece las siguientes reglas. El primer jugador ofrece una división. Si el segundo jugador acepta la oferta el juego termina; si la rechaza, el juego se repite, pero ahora los jugadores se reparten sólo \$800.000, y es el jugador 2 quien ofrece una división. Si el jugador 1 acepta la oferta de 2 el juego termina ahí. Si la rechaza el filántropo le entrega \$300.000 al jugador 1, nada al jugador 2, y el juego termina.

- a) Dibuje la forma extensiva del juego.
- b) Encuentre el único equilibrio perfecto en subjugos de este juego.
- c) Considere la siguiente combinación de estrategias: El jugador 1: (i) ofrece quedarse con un millón en la primera vuelta; (ii) en la segunda vuelta, rechaza cualquier oferta del jugador dos que le otorgue menos de \$800.000. El jugador 2: (i) acepta cualquier oferta que le haga el jugador 1 en la primera vuelta. (ii) ofrece quedarse con nada en la segunda.
- Muestre que esta combinación de estrategias es un equilibrio de Nash, pero no es perfecto en subjugos.

14. Considere la delicada situación en que se encuentran los dictadores del mundo actual. Si abandonan el poder, se exponen a ser enjuiciados en forma posterior, incluso en aquellos casos en que lo abandonan en forma pacífica. Podemos preguntarnos si la posibilidad de ser enjuiciados hace más difícil que el dictador deje el poder en forma voluntaria. Más aún, interesa determinar si la posibilidad de castigo reduce las probabilidades de golpes. Para analizar esta situación, considere el juego entre un potencial dictador y un parlamento (que representa a los ciudadanos) que se muestra en la figura 1.4. El dictador decide primero si hacer un golpe o no. Si lo hace, en algún momento futuro la presión popular puede hacerlo decidir entre negociar su salida con el parlamento o aferrarse al poder. Si negocia su salida, el parlamento puede enjuiciarlo o no hacerlo. Si se aferra al poder, con probabilidad  $e$  tiene éxito (es su mejor resultado, y el peor para el parlamento). Si no tiene éxito, lo que ocurre con probabilidad  $1 - e$ , puede ser enjuiciado (lo peor para el dictador) por el parlamento o no serlo.

- Suponga que el dictador está en el poder. Encuentre la condición sobre  $e$  que determina cuando prefiere aferrarse al poder.
- La revista Economist sugiere que si el parlamento puede comprometerse creíblemente a no enjuiciar (lo que corresponde a eliminar del juego las ramas Juicio) es más probable que el dictador negocie su salida y no trate de aferrarse al poder. Determine si esto es cierto, determinando los valores de  $e$  que le hacen preferir aferrarse al poder.
- La pregunta ahora es si existe el compromiso de no hacer juicio, cuál es la probabilidad de golpe? Es razonable la propuesta de Economist?
- Suponga que el país firma un acuerdo internacional que lo obliga a juzgar siempre a los dictadores, independiente de si su salida fue negociada o no. ¿Le conviene firmar este acuerdo al país?

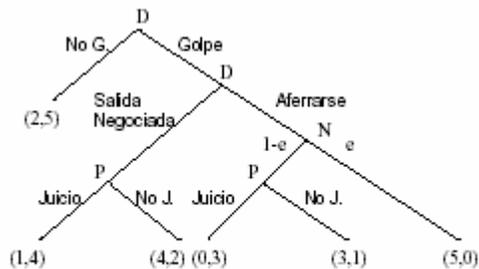


Figura 1.4: El juego de los dictadores

15. Siete feroces piratas se juntan para repartir un botín de 100 monedas de oro. Lo harán de acuerdo con las siguientes reglas: el pirata #1 propone una división de monedas (cada Moneda es indivisible), por ejemplo, (55; 5; 5; 6; 4; 7; 3): esto significa que se queda con 55 monedas mientras el pirata #2 recibe 5, etc. Los siete piratas botan la proposición. Si la mayoría acepta la repartición se lleva a cabo de acuerdo a la propuesta. En caso contrario, el pirata #1 es arrojado por la borda y el pirata #2 hace una proposición la que se vota entre los seis restantes, y así sucesivamente. Empates en una votación son resueltos en contra de la proposición. Además, si a un pirata le es indiferente aprobar o rechazar una proposición dado lo que ocurrirá en el futuro, votará en contra, salvo si le ofrecen quedarse con todo el botín, en cuyo caso votará a favor. Por último, un pirata prefiere recibir nada antes de que lo arrojen por la borda. Describa en detalle el equilibrio perfecto en sub-juegos de este juego. (Ayuda: Parta estudiando qué ocurre cuando solo quedan dos piratas).

16. Usted escucha conversar a un empresario y un vendedor de capacitaciones:

V: si usted capacita a sus empleados ellos podrán rendir mejor y por lo tanto producir más, lo que se traducirá en mayores utilidades.

E: Ok, pero si lo hago tendré que pagarles más, ya que si no ellos pueden trabajar para mi Competencia y ganar más, luego yo no puedo hacerlo porque la competencia no a pagado el costo de la capacitación y por lo tanto podrá ofrecerles un sueldo mayor.

V: Pero su competencia no podrá saber si usted capacitó a sus empleados.

E: Pero mis actuales trabajadores tendrán todo el incentivo para hacérselos saber o no? Comente y explique por qué el no capacitar puede ser un equilibrio de Nash.

17. En 1974 el público en general obtuvo una ilustración gráfica de la “tragedia de los comunes” en una serie de fotos de la Tierra tomadas desde un satélite. Las fotos del norte de África mostraban una mancha irregular, de 1000 kilómetros cuadrados de extensión. Las investigaciones a nivel del suelo revelaron un área cercada dentro de la cual había abundancia de hierba. Fuera, la cubierta del suelo había sido devastada. Obviamente el área cercada era propiedad privada y fuera de ella la tierra no tenía dueño. Una era usada por agricultores (tierra privada) y la otra por nómades. Explique el fenómeno basado en la teoría de juegos.

¿Cuál es el equilibrio de Nash cuando no existe propiedad clara?.

18. Considere el juego de la inspección. En el, un trabajador puede elegir entre trabajar (T) y no hacerlo (NT). El costo del esfuerzo para el agente es  $g = 2$ . El empleador utiliza al empleado para producir un bien con valor  $v = 4$ , el que sólo se produce si el trabajador trabaja. El empleador puede realizar una inspección (I) o no hacerlo (NI). El costo de la inspección es

$h = 1$  y determina si se le debe pagar al empleado. El empleador paga un salario  $w = 3$ , a menos que tenga evidencia (mediante una inspección) de que el trabajador no trabajó, en cuyo caso lo despiden y le paga 0.

a) Encuentre la forma normal del juego.

b) Muestre que no hay equilibrios de Nash en estrategias puras.

c) Encuentre el equilibrio en estrategias mixtas.

19. Dos jugadores deben repartirse un dólar. Las reglas son las siguientes: el jugador 1 parte ofreciendo una división ( $s$ ;  $1 - s$ ) del dólar ( $s$  para el jugador 1). Luego el jugador decide si la acepta o no. Si la acepta, el juego termina ahí; si no acepta, el juego avanza un período y el jugador 2 ofrece una división y ahora 1 decide si acepta o no; y así sucesivamente. Esto continúa hasta que se logre el acuerdo. El factor de descuento de 1 y 2 es el mismo e igual a  $\delta \in (0; 1)$ :

a) Demuestre que, en el único equilibrio perfecto en subjuegos el resultado es tal que el jugador 1 ofrece quedarse con  $\frac{1}{1+\delta}$  y el jugador 2 acepta de inmediato y se queda con  $\frac{\delta}{1+\delta}$

b) Demuestre que este juego tiene infinitos equilibrios de Nash.

20. Considere los siguientes juegos en forma normal:

		J <sup>2</sup>	
		R	L
J <sup>1</sup>	U	(6,5)	(x,y)
	D	(y,x)	(5,6)

		J <sup>2</sup>		
		R	C	L
J <sup>1</sup>	U	(9,9)	(7,8)	(6,7)
	D	(7,9)	(6,10)	(11,11)

a) Para el juego de la izquierda:

i. Encuentre condiciones sobre los parámetros  $(x,y)$  tales que el único equilibrio de Nash del juego (en estrategias puras y mixtas) sea el par de estrategias  $(D,L)$ , en donde  $(P_U, P_D, P_R, P_L)$  corresponden a las probabilidades de jugar las estrategias  $(U, D, R, L)$ , respectivamente.

ii. Encuentre al menos una configuración para los parámetros  $(x,y)$ , de forma que las correspondencias de mejor respuesta de ambos jugadores se intercepten en tres ocasiones (i.e., que existan solo 3 equilibrios de Nash, incluyendo estrategias mixtas). Verifique su resultado.

b) Para el juego de la derecha:

i. Determine las funciones (o correspondencias) de mejor respuesta para cada jugador.

ii. Encuentre todos los equilibrios de Nash.

21. Considere un mercado de bienes diferenciados en donde operan 2 duopolistas. Cada uno de ellos utiliza el precio que cobra como su variable estratégica. La cantidad demandada de la firma  $i = 1,2$  está dada por la expresión,  $j \neq i$ ,  $0 < b < \frac{1}{2}$ . Suponga adicionalmente que cada firma tiene un costo de producción unitario de  $0 < c < a$ .

a. Encuentre los precios  $(p_1^*, p_2^*)$  y las utilidades  $(\pi_1^*, \pi_2^*)$  que maximizan el bien común, entendido este último como la suma de las utilidades de ambas firmas.

b. Encuentre los precios  $(p_1^B, p_2^B)$  y las utilidades  $(\pi_1^B, \pi_2^B)$  que constituyen un equilibrio de Nash, en un escenario en donde ambas firmas eligen el precio a cobrar, simultáneamente.

c. Encuentre los precios y las utilidades que constituyen un EPS, en un escenario en donde la firma 1 selecciona su precio antes que la firma 2, lo que es observable por la firma 2.

d. Encuentre el valor mínimo del factor de descuento  $0 < \delta^* < 1$ , común a ambas firmas, que hace sostenible un acuerdo de colusión entre las firmas, bajo la siguiente estrategia del tipo gatillo: “cobrar un precio igual a  $(p_1^*, p_2^*)$  si en el pasado ambas firmas han cobrado  $(p_1^*, p_2^*)$ , y de lo contrario, cobrar  $(p_1^B, p_2^B)$  por siempre”.

e. ¿Cuál es el principio, o regla, que debe satisfacer una estrategia del tipo gatillo para conformar un EPS de cooperación? ¿Qué cualidad deben poseer los pagos históricos para implementar una estrategia como la descrita en la parte d)?

f. ¿Cuál es el mejor acuerdo de precios idénticos al que pueden llegar los duopolistas, bajo una estrategia del tipo gatillo, si el factor de descuento de ambos,  $0 < \delta < 1$ , es tal que  $0 < \delta < \delta^* < 1$ ? Determine dicho nivel como función del parámetro  $\delta$ .