UNIVERSIDAD DE CHILE
FAC. DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
Departamento de Ingeniería Industrial

Curso: IN51A Economía Industrial
Semestre: Otoño 2006
Profesores: Ronald Fisher
Soledad Arellano
Auxiliares: Paola Bordón
Mario Carrasco
Bruno Carriquiry

Clase Auxiliar #2: Teoría de Juegos

P1) Considere el juego del n-ultimátum, figura 1. En este juego, el primer jugador ofrece dividir US$100 con el jugador 2. Si 2 acepta, el juego acaba y los jugadores reciben los pagos respectivos (el primer pago es del oferente, el segundo pago es para el que decide aceptar, los demás reciben cero). Si 2 no acepta, debe hacer una oferta de división de US$100δ, con δ< 1 al jugador 3. Si 3 no acepta, le hace una oferta a 4, y asíı sucesivamente.

- *a)* **Considere n=3. Encuentre un equilibrio de Nash en que el primer jugador recibe US$50.**
- *b)* **(Esta parte es independiente de la anterior). Considere solo equilibrios perfectos en el subjuego. Encuentre la expresión que describe cuánto recibe cada jugador para un n cualquiera.**
- *c)* **Considere el caso en que lím →∞ Encuentre la condición para que el primer jugador reciba US$80 en un equilibrio perfecto en el subjuego.**

P2) James Dean reta a River Phoenix a un juego para demostrar su valor. Si River Phoenix acepta, cada uno se sube a un auto se alejan 500 metros en direcciones opuestas, dan la vuelta y aceleran en una calle estrecha, uno hacia el otro. El primero que se desvía (D) pierde y el que sigue (S) gana. River Phoenix puede no aceptar, en cuyo caso queda como un cobarde. Los pagos son los indicados en la figura 2.

- **a) Encuentre todos los equilibrios de este juego (10pts por dos equilibrios, 30 por todos).**

P3) Considere el juego de la figura 3:

- **a) ¿Cuántos subjuegos tiene este juego? Muéstrelo (o descríbalos)**
- **b) ¿Cuál es el conjunto de información de los nodos b y j?**
- **c) En relación al subjuego que parte en el nodo e:**
  - **i. Escríbalo en forma normal**
  - **ii. Encuentre todos los equilibrios de Nash en estrategias puras**
  - **iii. ¿Son estos equilibrios de Nash EPS? Explique por qué.**
- **d) Encuentre todos los EPS en el subjuego que comienza en el nodo c. Para cada uno, encuentre el pago que recibe cada jugador.**
- **e) Encuentre todos los EPS del juego completo.**

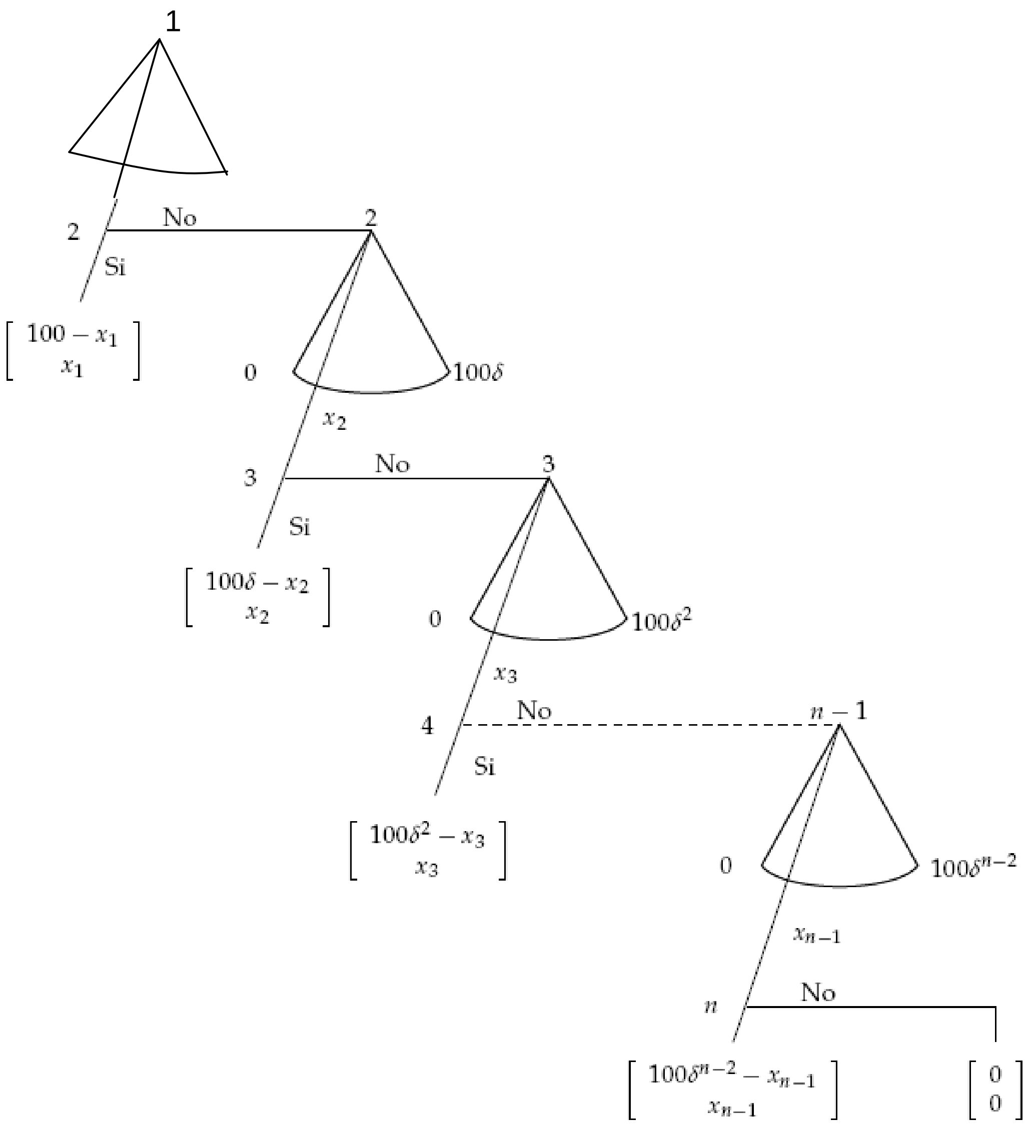


Figura 1: El juego del n-ultimátum

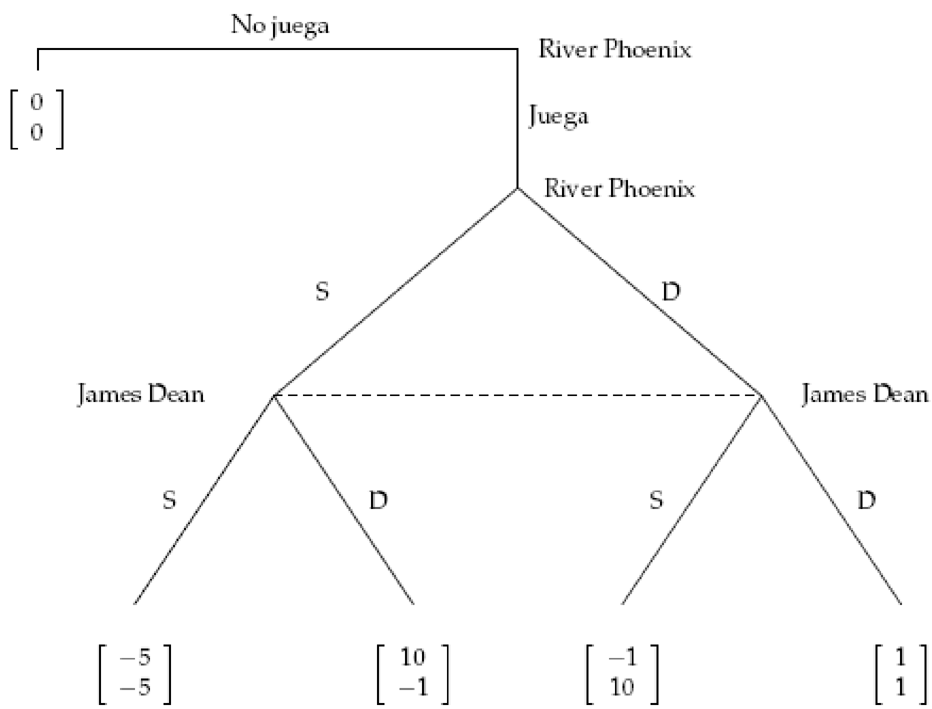


Figura 2: El juego del Rebelde sin Causa

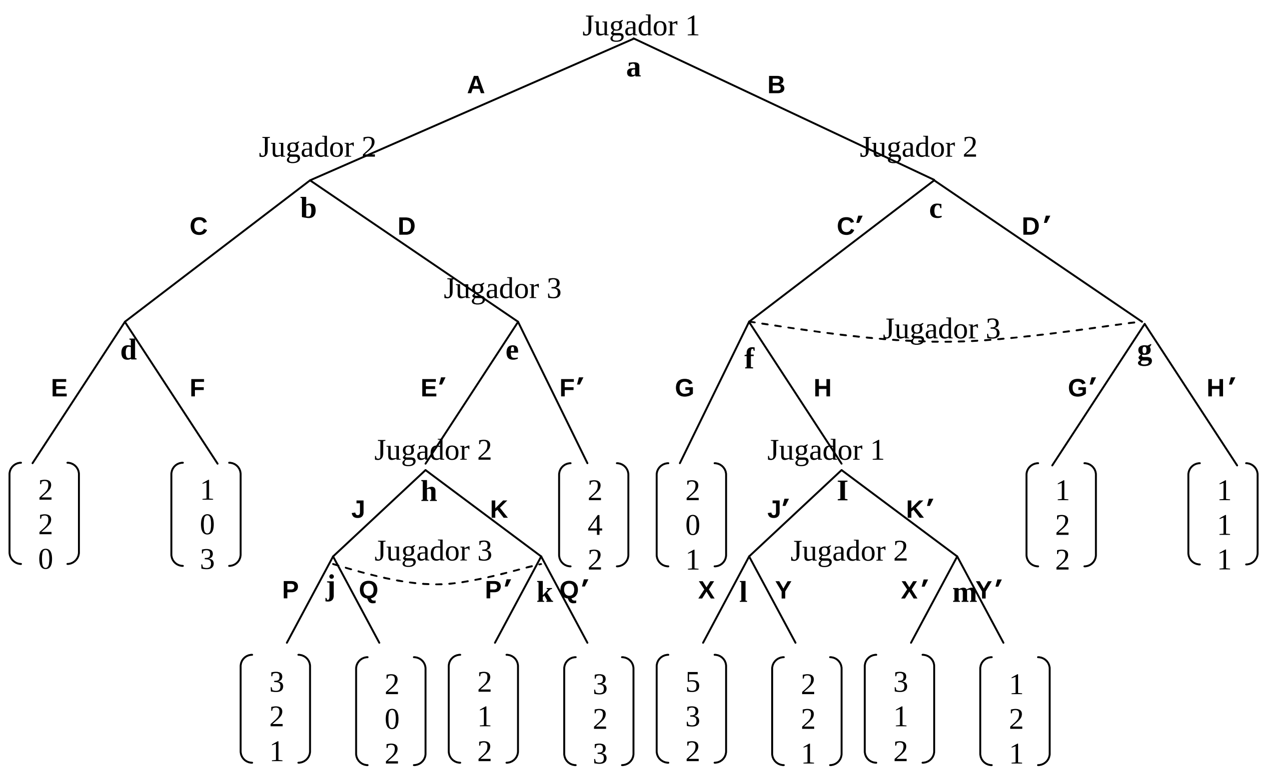


Figura 3.

P4) (PROPUESTO) Siete feroces piratas se juntan para repartir un botín de 100 monedas de oro. Lo harán de acuerdo con las siguientes reglas: el pirata #1 propone una división de monedas (cada Moneda es indivisible), por ejemplo, (55, 5, 5, 6, 4, 7, 3): esto significa que se queda con 55 monedas mientras el pirata # 2 recibe 5, etc. Los siete piratas votan la proposición. Si la mayoría acepta la repartición se lleva a cabo de acuerdo a la propuesta. En caso contrario, el pirata # 1 es arrojado por la borda y el pirata # 2 hace una proposición la que se vota entre los seis restantes, y así sucesivamente. Empates en una votación son resueltos en contra de la proposición. Además, si a un pirata le es indiferente aprobar o rechazar una proposición dado lo que ocurrirá en el futuro, votará en contra, salvo si le ofrecen quedarse con todo el botín, en cuyo caso votará a favor. Por ultimo, un pirata prefiere recibir nada antes de que lo arrojen por la borda. Describa en detalle el equilibrio perfecto en sub-juegos de este juego. (Ayuda: Parta estudiando qué ocurre cuando solo quedan dos piratas).

P5) (PROPUESTO) **Considere el siguiente juego de ubicación geográfica**

Firma 2

Firma1

	Norte	Centro	Sur
Norte	-2, 3	2, 4	0, -1
Centro	-3, 1	-2, 4	0, 0
Sur	-2, 2	-2, -1	0, 0

a) Encuentre todas las estrategias dominantes.

b) Encuentre todas las estrategias dominadas.

c) Encuentre todos los equilibrios de Nash en estrategias puras.

P6) (PROPUESTO) Un monopolio natural es una industria en que las condiciones tecnológicas o de demanda son tales que es eficiente que solo produzca una firma (¿porqué?). Una industria se puede transformar en un monopolio natural por una caída violenta de la demanda. Por ejemplo, cuando termino la guerra fría la demanda por armamentos cayó y varias firmas salieron del mercado. En esta pregunta se le pide examinar que determina cual firma sale del mercado cuando una industria es monopolio natural, pero inicialmente hay más de una empresa en el mercado.

Considere un duopolio que permanecerá por dos años más y que cada firma pierde C por año. Si una de las firmas saliera del mercado, entonces la restante tendría ingresos iguales a Π por período por lo que quede de los dos años. Cada firma puede elegir cuando salir: ahora (t=0), en un año más (t=1) o en dos años (t=2).

a) Escriba el juego en forma normal.

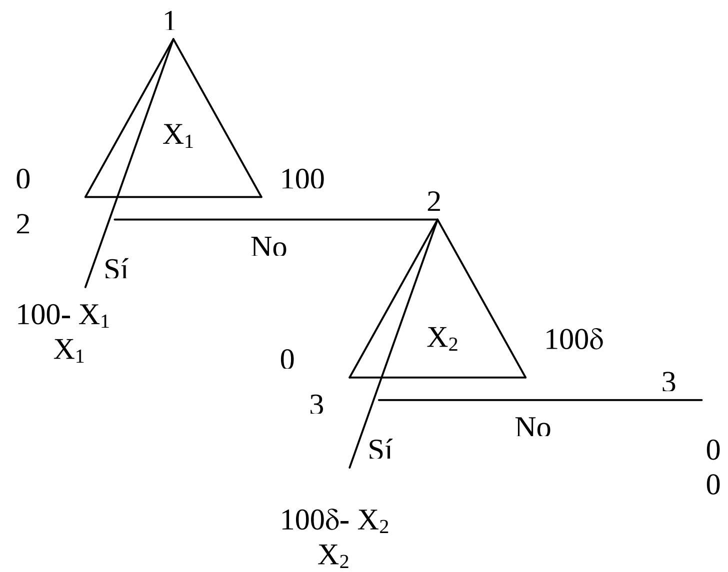
b) Encuentre el (o los) equilibrio (s) de Nash en estrategias puras. Si una firma decide salir, ¿en qué momento lo hace en equilibrio?

c) **Encuentre los equilibrios de Nash en estrategias mixtas.**

<u>Solución</u>:

P1) Juego del n-ultimátum

a) Para n=3 se tiene el siguiente árbol:



Un Equilibrio de Nash[1] considera que la estrategia de cada jugador es una mejor respuesta ante las estrategias de los demás jugadores.

En este caso debemos considerar que el primer jugador debe recibir como pago US$50.
Para que el jugador 1 pueda recibir 50 el jugador 2 debería aceptar la propuesta que le hace el 1, para ello el jugador tres debe amenazar de tal manera que al jugador 2 no le convenga rechazar lo que le ofrece el jugador 1. Por lo cuál las estrategias de cada jugador son de la siguiente manera.

Estrategias:
Jugador 1: Ofrece US$50.
Jugador 2: Acepta solo si $X_1 \geq 50$.
Jugador 3: acepta solo si $X_2 > 50$.

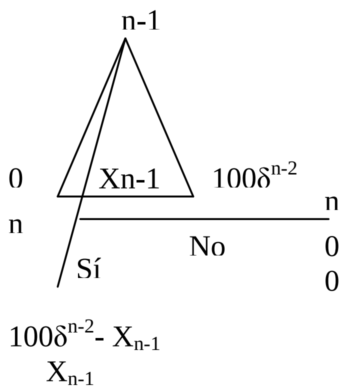
---

[1] Es una combinación de estrategias $S^* = (S^*_1, ..., S^*_n)$ tal que $\forall i, u_i(S^*_i, S^*_{-i}) \geq u_i(S_i, S^*_{-i})$

Con estás estrategias se estaría cumpliendo un equilibrio de Nash, pues a nadie le conviene salir de la decisión que tomaron, dadas las estrategias de los demás jugadores.

b) Sabemos que un Equilibrio Perfecto en el Subjuego se cumple si al considerar cada subárbol, la combinación de estrategias restringidas al subárbol es un equilibrio de Nash del juego restringido al subárbol. De otra manera, cada jugador juega en forma óptima en cada nodo del subjuego.

Sea el siguiente subárbol genérico.



Dado que tenemos este subárbol para cada jugador, debemos ver que pasa con la decisión del jugador n-1. Puesto que si el jugador n rechaza el ofrecimiento de n-1, ambos se quedarán con 0, el jugador n-1 debe ofrecer a n, $X_{n-1} \geq 0$, ofreciéndole lo mínimo que equivale a 0, quedándose el con $100\delta^{n-2}$.

Ahora para que el jugador n-1, acepte el ofrecimiento del jugador n-2, este debe ofrecerle un pago tal que:
$X_{n-2} >= 100\delta^{n-2}$, quedándose el con una paga de $100\delta^{n-3}-100\delta^{n-2}$.

Veamos ahora el caso para el jugador n-3, para que le jugador n-2 acepta debe ofrecerle $X_{n-3} >= 100\delta^{n-3}-100\delta^{n-2}$, quedándose el con un pago de $100\delta^{n-4}-(100\delta^{n-3}-100\delta^{n-2})$ y así sucesivamente, por lo cuál llegamos a que el pago para cualquier n es la siguiente:

$$X_{n-i} = 100\delta^{n-(i+1)}(1-\delta+\delta^2-\delta^3.........)$$

$$X_{n-i} = 100\delta^{n-(i+1)}\sum_{j=0}^{i-1}(-\delta)^j (*)$$

Por otro lado, sabemos que $\sum_{j=0}^{i-1}(-\delta)^j = \frac{1+\delta^{n+1}}{(\delta+1)}$

Remplazando este valor en (*), podemos concluir que el pago para cualquier jugador n, es el siguiente:

$$X_{n-i} = 100\delta^{n-(i+1)}\frac{(1+\delta^{n+1})}{(1+\delta)}$$

C) Utilizando los resultados encontrados el parte B), tenemos que:

$X_{n-i} = 100\delta^{n-(i+1)}\frac{(1+\delta^{n+1})}{(1+\delta)}$, para encontrar la condición para que el jugador reciba US$80, cuando $\lim n \to \infty$, con lo cuál llegamos a lo siguiente:

$$80(1+\delta) = 100$$

$$\delta = \frac{1}{4} = 0.25$$

P2) River Phoenix v/s James Dean

Hay que destacar que este juego tiene dos subjuegos:

- el subjuego que se origina después de que River Phoenix acepta entrar en la competencia

- el juego completo.

Luego, resolveremos primero cada subjuego:

1. Subjuego en que ambos jugadores juegan (es decir, después de que River Phoenix acepta entrar al juego)

- Equilibrio en el caso en que ambos juegan:

		JD S (q)	JD D (1-q)
RP	S (p)	-5, -5	-1, 10
RP	D (1-p)	10, -1	1, 1

Este juego tiene dos Equilibrios de Nash en estrategias puras: (S,D) y (D,S), ya que en ambos casos ningún jugador tiene incentivos para cambiar de opinión. En otras palabras ninguno de los jugadores tiene desviaciones rentables. Recuerde que los EN no están compuestos por los pagos sino por las estrategias, en consecuencia los EN en estrategias puras de este subjuego están dados por (S,D) y (D,S). Los jugadores reciben los pagos (10,-1) en el primero y (-1,10) en el segundo, respectivamente. Para facilitar el desarrollo posterior, le llamaremos EN1 a (S,D) y EN2 a (D,S):

Equilibrio Mixto:

En equilibrio, se debe cumplir que:

$EU_{RP}(\sigma_{JD}, S) = EU_{RP}(\sigma_{JD}\ D)$
$EU_{JD}(S, \sigma_{RP}) = EU_{JD}(D, \sigma_{RP})$

Sea p (q) la probabilidad que RP (JD) juegue S. En base a las ecuaciones anteriores, se debe cumplir lo siguiente:

(1) => $-5q + 10(1-q) = -q + (1-q)$

$-5q + 10 - 10q = -2q + 1$

$-15q + 10 = -2q + 1 \Rightarrow 13q = 9 \Rightarrow$ $q = 9/13$ y $(1-q) = 4/13$

(2) => $-5p + 10(1-p) = -p + (1-p)$

$-5p + 10 - 10p = -2p + 1$

$-15p + 10 = -2p + 1 \Rightarrow 13p = 9 \Rightarrow$ $p = 9/13$ y $(1-p) = 4/13$

El equilibrio de Nash en estrategia mixta es (EN3):

$\sigma_{JD} = \{9/13, 4/13\}$; $\sigma_{RP} = \{9/13, 4/13\}$

Entonces la utilidad esperada en el equilibrio Mixto sería:

$EU_{JD}(\sigma_{JD}, \sigma_{RP}) = 9/13*9/13*-5 + 9/13*4/13*10 + 4/13*9/13*-1 + 4/13*4/13*1 = -65/169 = -0.38$

$EU_{RP}(\sigma_{JD}, \sigma_{RP}) = 9/13*9/13*-5 + 9/13*4/13*-1 + 4/13*9/13*10 + 4/13*4/13*1 = -65/169 = -0.38$

Una vez encontrados los tres equilibrios del subjuego, procedemos a resolver el primer subjuego (correspondiente al juego completo). Para ello, cada equilibrio se compara con el pago que reciben ambos jugadores si RP decide no aceptar la invitación a jugar (0,0)

- (S,D) = (10,-1) => RP elige jugar.

- (D,S) = (-1,10) => RP elige no jugar.
- Por último, el equilibrio mixto (-0.38 < 0) por lo que RP decide no jugar.

Luego este juego tiene 3 equilibrios perfectos en el subjuego:

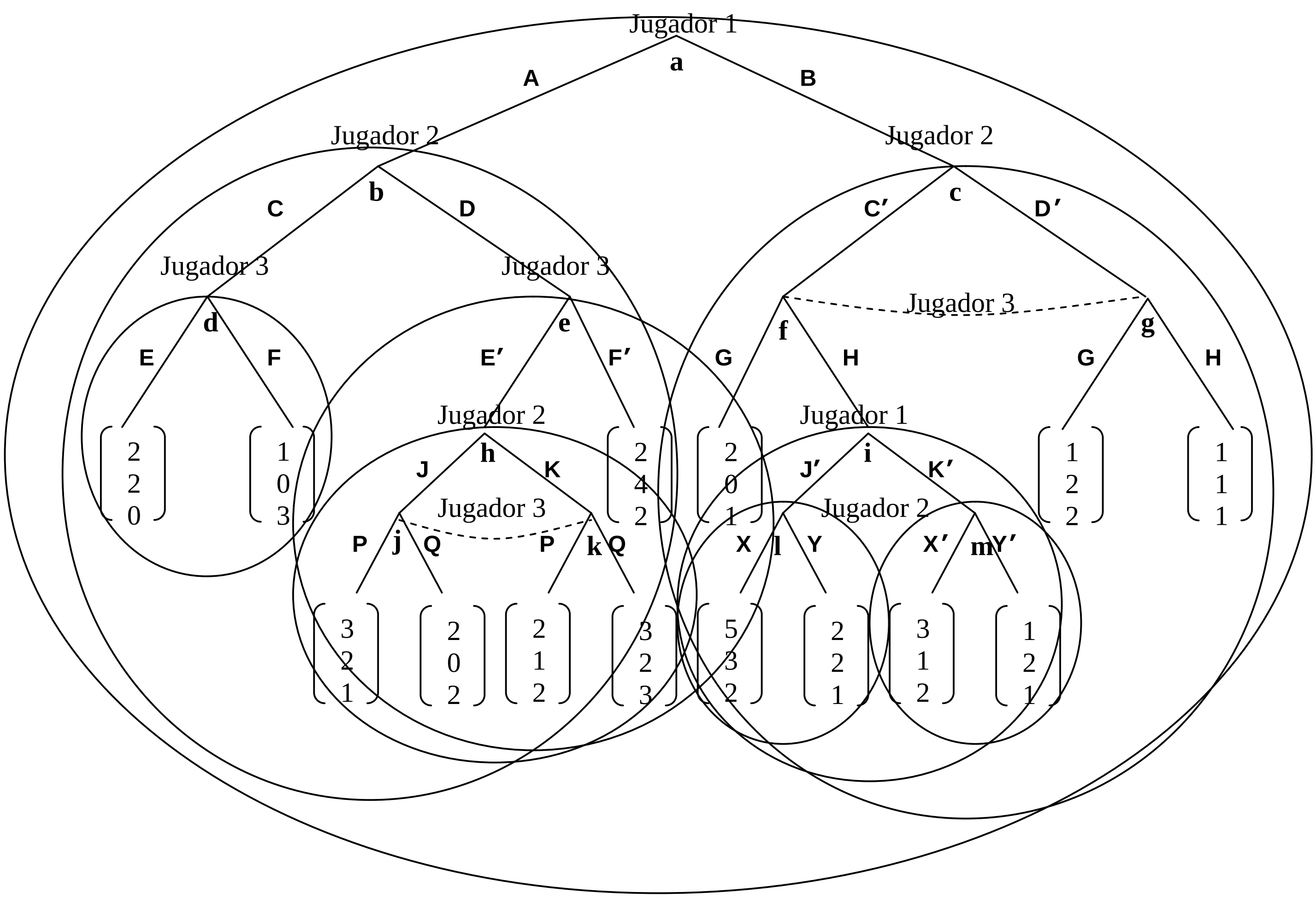
EPS1: en el primer nodo RP decide jugar y posteriormente Sigue mientras JD se desvía.

EPS2: En el primer nodo RP decide No jugar, y en el segundo subjuego RP se desvía y JD Sigue. (la trayectoria de equilibrio es simplemente No jugar)

EPS3: en el primer nodo RP decide no jugar. En el segundo subjuego ambos jugadores juegan una estrategia mixta dada por (9/13, 4/13). (La trayectoria de equilibrio es simplemente no jugar)

P3)

a) Son 9 subjuegos

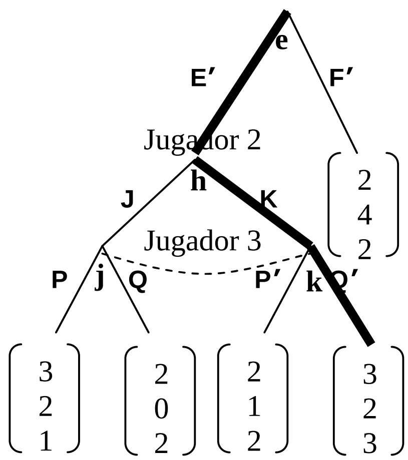


b) El Conjunto de información consiste en los nodos en los que el jugador cree que puede estar:

Conjunto de información Nodo b = h(b) = {b}

Conjunto de Información Nodo j = h(j) = {j,k}

c)



1.

Forma Normal:

		Jugador 3			
		E’P	**E’Q**	**F’P**	**F’Q**
Jugador 2	**J**	2 , 1	0 , 2	4 , 2	4 , 2
	K	1 , 2	2 , 3	4 , 2	4 , 2

2. En estrategias puras hay tres equilibrios de Nash

EN1=(J,F’,P)

EN2=(J,F’,Q)

EN3=(K,E’,Q)

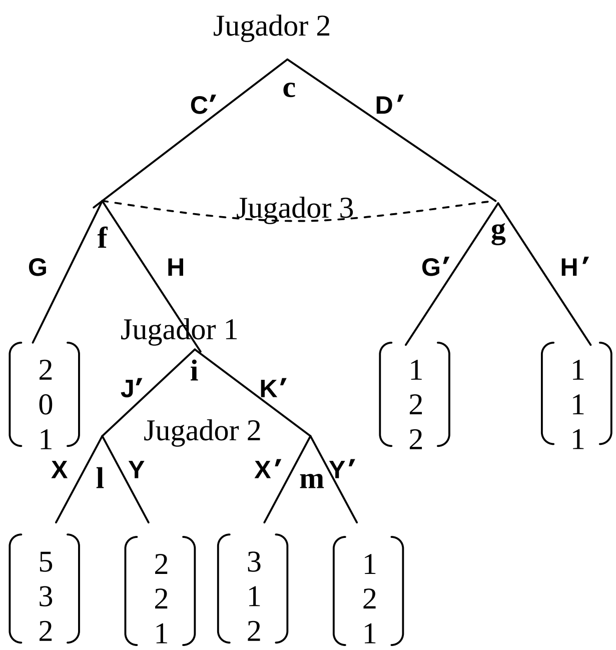
Sólo se pedía en estrategias puras.

3. Sólo EN3 es un EPS (Eso se observa resolviendo primero el subjuego que comienza en el nodo h y luego resolviendo el subjuego superior, ver figura) El equilibrio del subjuego que comienza en el nodo h es (K, Q) cuyo pago es (2,·).Luego cuando el jugador 3 (en el nodo e) tiene que decidir entre E’ y F’ elige E’ porque el pago que obtiene es mayor.
Luego, el EPS del juego que comienza en e es sólo (K, E’, Q).
Los otros equilibrios representan amenazas no creíbles pues jugador 3 siempre va a preferir estrategia E’ que F’.

Puntajes:

1. 2
2. 4
3. 4

d)



Para el nodo l, el equilibrio es que el jugador 2 juegue X y obtiene una utilidad de 3, el jugador 1 obtiene una utilidad de 5 y el jugador 3 obtiene una utilidad de 2

Para el nodo m, el equilibrio es que jugador 2 juegue Y’ y obtiene una utilidad de 2, mientras que el jugador 1 obtiene una utilidad de 1 y el jugador 3 obtiene 1.

Para el nodo i, el equilibrio es que jugador 1 juegue J' y jugador 2 juegue (X,Y'), obteniendo jugador 1 una utilidad de 5, el jugador 2 obtiene 3 y el jugador 3 obtiene 2.

Para el nodo c

		Jugador 3	
		G	**H**
Jugador 2	**C'**	0 , 1	3 , 2
	D'	1 , 2	1 , 1

Existen 2 equilibrios en estrategias puras

Buscar equilibrios en estrategias mixtas

		Jugador 3	
		G (q)	**H (1-q)**
Jugador 2	**C' (p)**	0 , 1	3 , 2
	D' (1-p)	1 , 2	1 , 1

(1-q)*3=q+(1-q) => 2/3=q => 1/3=(1-q)

p+2*(1-p)=2*p+(1-p) =>p=1/2 =>(1-p)=1/2

- ⇨ E(U2(σ2,σ3)= p*q*0+p*(1-q)*3+(1-p)*q*1+(1-p)*(1-q)*1 = 1

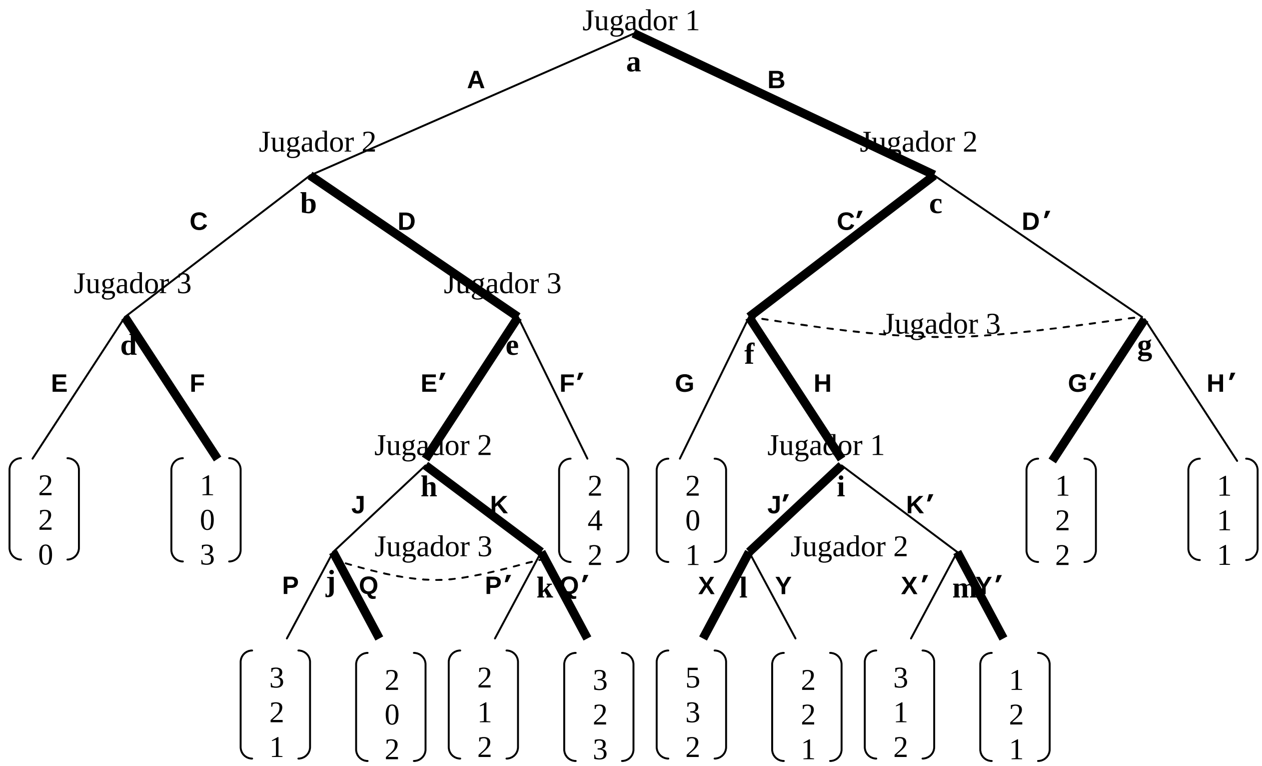
- ⇨ E(U3(σ2,σ3)= p*q*1+p*(1-q)*2+(1-p)*q*2+(1-p)*(1-q)*1 = 3/2

Si el jugador 2 y 3 juegan el equilibrio en estrategias mixtas, el jugador 1 jugará J', lo que tiene un pago asociado de 2 (ver árbol).

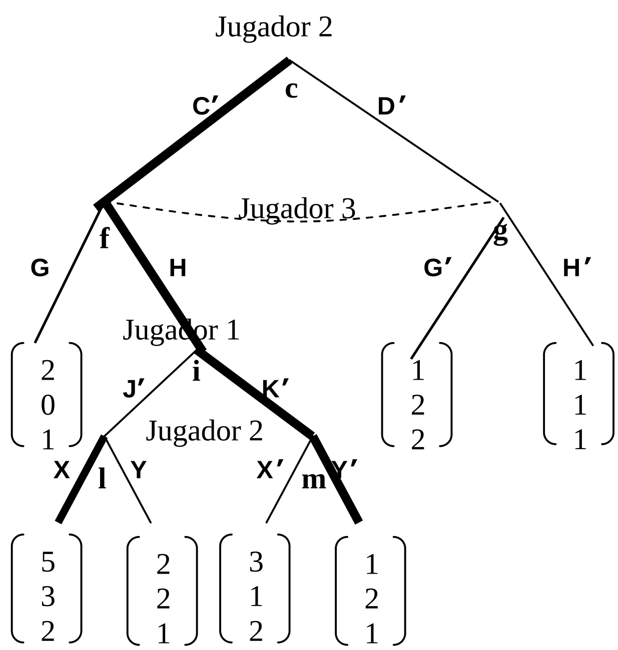
EPS1=[J',(C',X,Y'),H] y el pago de los jugadores es (5,3,2)
EPS2=[J',(D',X,Y'),G] y el pago de los jugadores es (1,1,2)
EPS3=[J',(σ2,X,Y'),σ3] con (σ2,σ3) =[(1/2,1/2);(2/3,1/3)] y el pago de los jugadores es (2,1,3/2)

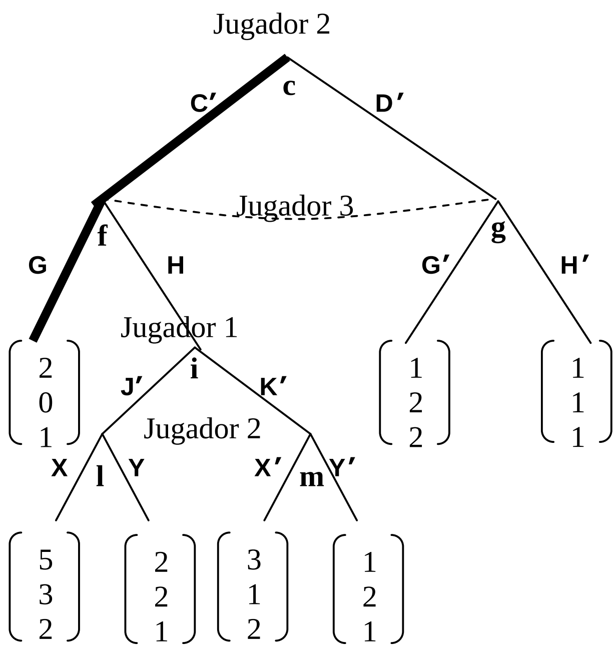
Puntaje 1 y 2: 2,5 puntos c/u
EPS3 (estrategias mixtas): 5 puntos

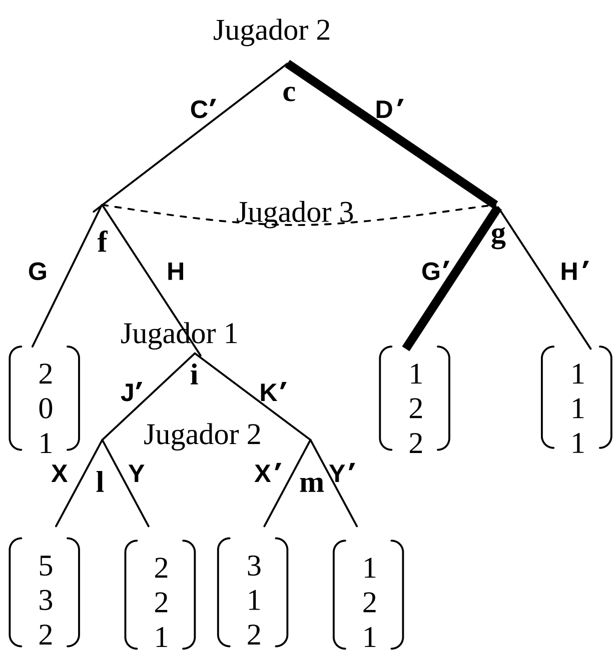
e)



Hay que buscar todos los equilibrios en todos los subárboles hasta llegar al árbol completo. Hay que considerar que en el subjuego que parte en c hay 3 posibles equilibrios en el subjuego.







EPS1: [(B,J'),(D,C',K,X,Y'),(F,E',H,Q)] y el pago asociado es (5,3,2)

EPS2: [(A,J'),(D,C',K,X,Y'),(F,E',G,Q)] y el pago asociado es (3,2,3)

EPS3: [A,J'),(D,σ2,K,X,Y'),(F,E',σ3,Q)], con σ2,σ3)=[(1/2;1/2);(2/3),1/3)] y el pago asociado es (3,2,3)

P4) Piratas

Resolvemos el juego por inducción hacia atrás y encontrar el equilibrio de Nash en cada subjuego.

Sean R1, R2, R3, R4, R5, R6 y R7 las reparticiones de las monedas propuestas por cada pirata respectivamente.

Al final, cuando queda un solo pirata, este se queda con todo el botín, por lo que R7 = {100}

Luego, el pirata 6, prefiere darle las 100 monedas al pirata 7 en vez de morir: R6 = {0,100}

El pirata 5, necesita 2 votos para que propuesta sea aceptada[2], por lo que mejora la pirata 6 y así obtiene su voto, sumado al voto propio del pirata 5 se acepta la propuesta y R5 = {99, 1, 0}

El pirata 4 necesita 3 votos para que se acepte su propuesta, por lo que mejora al pirata 6 y 7, obteniendo sus votos, más su voto propio obtiene 3 votos y R4 = {97, 0, 2, 1}

El pirata 3 necesita 3 votos para que se acepte su propuesta, por lo que mejora al pirata 5 y 7. Así obtiene 2 votos, lo que sumado al suyo propio genera 3 votos. R3 = {97, 0, 1, 0, 2}

El pirata 2 necesita 4 votos para que su propuesta sea aceptada, luego necesita 3 votos de sus compañeros, y sumando el voto propio obtiene los 4 votos necesarios. Así, tenemos que
R2 = {96, 0, 1, 2, 1, 0}

Por último, el pirata 1 necesita 4 votos para que le acepten la repartición, por lo que mejora al pirata 3,4 y 7 y así obtiene sus votos. Luego, R1 = {96, 0, 1, 2, 0, 0, 1}

Por lo tanto, se tiene que cada una de las reparticiones propuestas es un equilibrio de Nash en ese subjuego, y el equilibrio perfecto en subjuego se obtiene por inducción hacia atrás, lo que lleva a que el equilibrio se obtenga en la primera repartición.

[2] Hay que destacar que cuando le toca repartir al pirata 5, solo quedan 3 piratas (5,6 y 7).

P5 .- <u>Respuesta</u>.

a) <u>Firma 1</u>

- Norte es una estrategia dominante (no en forma estricta)
    i. Norte domina débilmente a Centro
    ii. Norte domina débilmente a Sur.

<u>Firma 2</u>

- No posee estrategias dominantes

b) <u>Firma 1</u>

- Centro es una estrategia dominada (no en forma estricta)
    i. Centro es débilmente dominada por Norte
    ii. Centro es débilmente dominada por Sur
- Sur es débilmente dominada por Norte

<u>Firma 2</u>

- Sur es una estrategia estrictamente dominada por Norte

c) Los equilibrios de Nash son:

$E1 = (S1^*, S2^*) = (\text{Norte, Centro})$
$E2 = (S1^*, S2^*) = (\text{Sur, Norte})$

P6 .-<u>Respuesta.</u>

a) Jugadores: Firma 1 y Firma 2.
Acciones: Salir en t=0, t=1, t=2

Las utilidades se describen en la siguiente matriz de pagos:

Firma 2

t=0	t=1	t=2
0 **0**	Π **0**	**2**Π **0**
0 Π	**-** **C** **-C**	Π**-** **C** **-C**
0	**-**	**-**

Firma 1	**2Π**	**C** **Π-C**	**2C** **-2C**	t=0

t=1

t=2

Se considera que el juego comienza al inicio del período 0, por lo que al final del período 0 o al inicio del período 1, una firma puede ganar 0 (si se retira al inicio), perder C si continua y la firma 2 también continua, o ganar Π si continua y la otra se retira.

a) Los Equilibrios de Nash en estrategias puras son:

EN1 = (Salir en t=0, Salir en t=2)
EN2 = (Salir en t=2, Salir en t=0)

Esto es, si una firma decide salir lo hace en el primer período o se queda hasta el final (t=2).

c) Sea r = prob. de que la firma 1 salga en t=1
s = prob. de que la firma 1 salga en t=2
p = prob. de que la firma 2 salga en t=1
q = prob. de que la firma 2 salga en t=2

La utilidad esperada para la firma 1 es:

$U_1= r(1-p-q)\Pi$ - $rpc - rpc + s(1-p-q)2\Pi + sp(\Pi-C) - sq2C$

$U_1= r(\Pi-p\Pi-q\Pi-pC-qC) + s(2\Pi-\Pi p-2\Pi q-pC-2qC)$

Vamos a buscar las probabilidades r-s y 1-r-s tal que la firma 1 se encuentre indiferente (tenga la misma utilidad esperada), cualquiera sea la estrategia de la firma 2.

Luego, para que la firma 1 este indiferente las probabilidades de la firma 2 deben ser:

Π-pΠ-qΠ-pC-qC=0 (1)
2Π-Πp-2Πq-pC-2qC=0 (2)

Reordenando:

p(Π+C) = Π - q(Π+C) (1′)
p(Π+C) = 2Π - q(2Π+2C) (2′)

Resolviendo, se tiene que $q = \dfrac{\Pi}{\Pi + C}$

Y por lo tanto p=0.

Como p=0, entonces la estrategia t=1 para la firma 2 es estrictamente dominada nunca será elegida.

Por simetría, se tiene que $s = q = \dfrac{\Pi}{\Pi + C}$ y que p=r=0.